Capítulo 9

PROPUESTA DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE USANDO GEOGEBRA5 PARA ABORDAR EL TEMA DE VARIACIÓN LINEAL EN PRIMERO DE SECUNDARIA

Proposal of learning activities using GeoGebra5 to address the topic of linear variation in the first year of secondary school

Maribel Monzalvo Moreno
Secretaría de Educación Pública de Hidalgo
Hidalgo, México
https://orcid.org/0000-0003-4538-5189
marymonzalvo8@gmail.com

Marcos Campos Nava
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Hidalgo, México
https://orcid.org/0000-0002-7534-3193
mcampos@uaeh.edu.m

Resumen. Se presenta el desarrollo y los resultados de un trabajo de investigación de tipo cualitativo cuyo objetivo fue proponer una secuencia de actividades de aprendizaje relacionadas con el tema de variación lineal. Desde el enfoque de resolución de problemas y el uso de la herramienta digital GeoGebra5.

Se reportan las observaciones hechas durante su puesta en práctica, haciendo énfasis en cómo el uso de herramientas tecnológicas per-

Cita este capítulo

Monzalvo Moreno, M. y Campos Nava, M. (2022). Propuesta de actividades de aprendizaje usando GeoGebra5 para abordar el tema de variación lineal en primero de secundaria. En: Villota Enríquez, J. A.; González Valencia, H. y Medina Agredo, P. (eds. científicos). *Educación y sociedad: cambios y transformaciones desde la ciencia y la tecnología*. (pp. 229-255). Cali, Colombia: Editorial Universidad Santiago de Cali.

mitió a los estudiantes examinar cualidades matemáticas asociadas al proceso de solución; proponer diversas representaciones; plantear conjeturas; utilizar argumentos y comunicar resultados.

Logrando reconocer a partir del problema verbal, que existía una correspondencia entre los valores de las dos variables involucradas, simbolizar la relación funcional de correspondencia y determinar el valor de una de las variables cuando se conoce el valor de la otra.

Palabra clave: variación lineal, resolución de problemas, GeoGebra5.

Abstract. The development and results of a qualitative research work whose objective was to propose a sequence of learning activities related to the topic of linear variation is presented. From the problem-solving approach and the use of the GeoGebra5 digital tool.

Observations made during its implementation are reported, emphasizing how the use of technological tools allowed students to examine mathematical qualities associated with the solution process; propose various representations; raise guesses; use arguments and communicate results. Being able to recognize from the word problem that there was a correspondence between the values of the two variables involved, symbolize the functional relationship of correspondence and determine the value of one of the variables when the value of the other is known.

Keywords: linear variation, problem solving, GeoGebra5

Introducción

En las últimas décadas, el uso de herramientas digitales ha sido cada vez más frecuente en las aulas de clases; esto ha traído como consecuencia, que se discuta cuál es la mejor forma de incorporarlas en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en particular de las matemáticas.

Entre las herramientas más comunes en el aula de Matemáticas, encontramos las calculadoras y programas computacionales especializados. Dichos elementos nos hacen reflexionar acerca de la necesidad de investigar cómo se puede incorporar este tipo de tecnología en el diseño de actividades de aprendizaje para ciertos tópicos del currículum de Matemáticas y qué consecuencias han traído al interior de las aulas de clase.

Un tema recurrente en el caso de México, por ejemplo, en los primeros cursos de Matemáticas en educación secundaria, es el contenido en relación a la variación lineal, un antecedente importante para el estudio de las funciones lineales en el nivel bachillerato. En esta dirección, existe una gran variedad de situaciones de contexto en el que dos cantidades se relacionan entre sí, siguiendo un patrón de variación lineal, dado por una constante de proporcionalidad, como puede ser el precio de un producto vendido a granel con relación a la cantidad de este, o el precio que hay que pagar respecto a diferentes porcentajes de descuento.

Considerando lo anterior, esta investigación tuvo como objetivo, proponer una secuencia de actividades de aprendizaje para que los alumnos reconozcan la correspondencia entre los valores de dos variables involucradas en un problema; simbolicen la relación funcional de correspondencia y determinen el valor de una de las variables cuando se conoce el valor de la otra. Estas actividades se realizaron dentro de un ambiente de resolución de problemas, con base en el uso de la herramienta digital GeoGebra5.

Adicionalmente, se exponen los referentes teóricos obtenidos en la revisión de la literatura, que dan sustento al diseño de la propuesta de la actividad de aprendizaje, su aplicación y análisis. Reportando las observaciones hechas durante su puesta en práctica, describiendo las estrategias y los recursos utilizados por los participantes en las hojas de trabajo. Además, se enfatizará en cómo el uso de esta herramienta digital permitió a los participantes, examinar algunas cualidades matemáticas asociadas al proceso de solución, usando diversas representaciones, planteando conjeturas, utilizando argumentos y comunicando resultados.

Marco teórico

Desde la perspectiva de resolución de problemas, es fundamental que el estudiante aprenda a formular preguntas y que reflexione abiertamente sobre los conceptos, problemas y estrategias de resolución, de acuerdo con la premisa que la actividad de aprender matemáticas no se reduce únicamente a un conjunto de reglas que pueden aplicarse en la resolución de diferentes problemas, sino por el contrario, se parte de una conceptualización dinámica, en la cual es importante identificar elementos que ayuden a desarrollar y promover una disposición matemática en los aprendices (Santos Trigo, 2014).

Para la Secretaría de Educación Pública de México (SEP), este enfoque de enseñanza pretende que los estudiantes usen de manera flexible conceptos, técnicas, métodos o contenidos en general, aprendidos previamente. Además, se intenta fomentar el desarrollo de procedimientos de resolución que no necesariamente les han sido enseñados con anterioridad (SEP, 2017).

En esta relación, el término problema se vincula a contextos rutinarios o no rutinarios, en los que el alumno busca la solución o soluciones, pero además incluye tener que aprender algún concepto matemático, con la finalidad de usar y desarrollar habilidades para acceder a diversos recursos y que estos sean utilizados. En otras palabras, se busca que el alumno aprenda estrategias que le permitan trabajar eficientemente con tales recursos en diversas situaciones. Pero el valor de las estrategias, habilidades y procesos radica en que favorezcan en el estudiante una forma flexible e independiente de pensar (Santos Trigo, 2014).

Para Schoenfeld (1985), la habilidad para resolver problemas “no es simplemente producto del conocimiento que tienen los estudiantes; también es derivado de sus experiencias con las matemáticas. Es decir, sus creencias sobre las matemáticas establecen el contexto psicológico dentro del cual hacen las matemáticas" (p. 14). Lo cual implica lidiar con nuevos problemas matemáticos de manera ingeniosa, flexible y eficiente. Este autor propone un marco para explicar el comportamiento de los estudiantes en actividades de resolución de problemas a partir de cuatro categorías:

a) El empleo de recursos básicos o hechos y procedimientos específicos

- Conocimiento informal e intuitivo. En ocasiones este conocimiento informal impide entender los conceptos matemáticos.

- Hechos y definiciones. Para plantear o seleccionar algún camino de solución. Un repertorio de recursos incluye también la forma en que el estudiante recuerda este conocimiento y tiene acceso a él para resolver el problema.

- Procedimientos rutinarios. Incluyen decisiones acerca del plan de solución y la evolución de este durante el proceso de solución (monitoreo o control).

- Conocimiento acerca del discurso del dominio.
- Errores consistentes o recursos débiles. Podrían ser el resultado de un mal aprendizaje.

b) El uso de estrategias cognitivas (conjunto de heurísticas)

Estrategias generales que podrían ser útiles para avanzar en la resolución de un problema.

Algunos elementos que pueden servir para guiar la discusión durante la resolución de problemas o el aprendizaje de algún concepto incluyen (Santos Trigo, 2014):

- El análisis: seleccionar valores particulares para ejemplificar el problema y encontrarle sentido usando argumentos en los que no haya pérdida de generalidad.

- La exploración: considerar problemas equivalentes, problemas modificados: ligera y sustancialmente modificados.

- Verificar que la solución cumpla con las siguientes pruebas: ¿Usa los datos pertinentes? ¿Concuerda con las predicciones o estimaciones originales? ¿Puede obtenerse de otro modo diferente?

c) El empleo de estrategias de monitoreo o autoevaluación (metacognitivo)

Las acciones que involucran un control incluyen:

- Tener claridad acerca de lo que trata el problema antes de iniciar el proceso de resolución (fase de entendimiento).

- Considerar varias formas de resolver el problema y seleccionar un método particular a partir de una evaluación en relación con su utilidad (fase de diseño).

- Monitorear el proceso y decidir cuándo abandonar algún camino que no esté produciendo resultados (fase de implantación).

- Revisar el proceso de resolución y evaluar la respuesta obtenida (visión retrospectiva)

d) Las creencias de los estudiantes acerca de las matemáticas y la resolución de problemas

Las creencias establecen el contexto dentro del cual funcionan los recursos, las estrategias heurísticas y el control. Estas creencias provienen del tipo de instrucción recibida en clase.

Respecto a la función del profesor dentro del proceso de instrucción. Varios autores como Schoenfeld (1985), Santos Trigo (2014), así como Ursini S., Escareño F., Montes D. y Trigueros M. (2016), le dan un papel preponderante, pues éste será quien guíe el proceso de aprendizaje de los alumnos, además de crear las condiciones para que surjan zonas amplias de desarrollo próximo, entendidas como: la distancia entre el nivel de desarrollo real, determinado por la capacidad del niño para resolver un problema de manera independiente, y el nivel de desarrollo potencial, determinado por su capacidad para resolver un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con compañeros más capaces (Ursini et al 2016, p. 41).

Es deseable como lo plantea Santos Trigo (2014), que dentro de las discusiones en grupos se permita que los estudiantes propongan conjeturas, usen ejemplos o contraejemplos, o discutan diversos caminos de solución.

Para ello, se requiere un ambiente en el aula que favorezca la participación de los estudiantes en tareas y experiencias diseñadas para profundizar, conectar y reorganizar sus conocimientos, promoviendo la interacción social. De esta forma, se pueden proponer ideas y conjeturas matemáticas, evaluar su propio pensamiento y el de los demás, y desarrollar habilidades de razonamiento matemático (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000).

En un escenario de instrucción basado en la resolución de problemas es importante que el error sea visto como una oportunidad para aprender. En esta relación, los estudiantes deben ver la dificultad de las tareas que se les pide realizar, como un desafío que vale la pena, en lugar de una excusa para rendirse. La idea de forma general es, que incluso cuando una tarea matemática sea difícil, ellos puedan verla como interesante y gratificante (SEP, 2017).

De acuerdo con Santos Trigo (2014), considera que las representaciones que se realizan con la ayuda del *software* de geometría dinámica, en este caso GeoGebra5, resultan importantes en la búsqueda e identificación de relaciones, pues "(...) los estudiantes pueden construir su propio repertorio de resultados matemáticos a partir de analizar el comportamiento de los elementos de la configuración (búsqueda de invariantes), al mover componentes dentro de la misma figura o construcción" (p. 133).

Estas actividades también permiten establecer conexiones entre los temas de álgebra, geometría y análisis de datos, como cuando usan ideas de un área de las matemáticas para comprender mejor otra área de matemáticas (proceso asociativo). Además, los estudiantes de secundaria pueden trabajar con sistemas de álgebra computacional que realizan de manera eficiente la mayor parte de la manipulación simbólica; por lo que el estudio del álgebra no tiene por qué limitarse a situaciones o tareas en las que la manipulación simbólica es relativamente sencilla (NCTM, 2000).

La elección del tema se basó en los siguientes propósitos educativos que plantea la Secretaría de Educación Pública para el nivel de secundaria (SEP, 2017):

a) Resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones hasta de segundo grado (...) (En primero de secundaria sólo se abordan ecuaciones lineales) (...).

b) Modelar situaciones de variación lineal (...) y definir patrones mediante expresiones algebraicas.

c) Elegir la forma de organización y representación –tabular, algebraica o gráfica– más adecuada para comunicar información matemática. (pp. 299-300)

Dentro del eje temático: número, álgebra y variación de la estructura curricular para secundaria (SEP, 2017), se contempla incorporar la relación entre variables en particular, la de variación lineal y variación inversamente proporcional.

Metodología

Considerando que se examina un caso en detalle a lo largo del tiempo, empleando múltiples fuentes de datos encontradas en el entorno que proporciona una descripción detallada, un análisis y las interpretaciones sobre el problema de investigación (McMillan y Schumacher, 2005), se identifica este trabajo como un estudio de caso.

Se inició con el diseño de las actividades didácticas considerando el uso del programa de geometría dinámica, GeoGebra5. La actividad se implementó en un plantel de telesecundaria, la cual presentó características comunes a las de un entorno social más amplio.

Se elaboró una guía didáctica para el docente en la cual se escribieron los resultados, se sugirieron algunos comentarios y preguntas retomados del modelo de resolución de problemas y uso de tecnología digital. El papel del profesor desde la metodología de resolución de problemas fue considerado fundamental, pues sirvió de guía en la discusión, retomó las dudas y participaciones de los estudiantes para profundizar en el tema, y creó un ambiente de trabajo propicio para el aprendizaje, entre otras funciones, tal como lo expone Santos Trigo (2014) a nivel teórico.

Fue importante, por tanto, pedir la colaboración de un profesor que impartiera clases en primer grado de telesecundaria, un docente interesado en aplicar la versión modificada al grupo del cual era titular.

El grupo de estudiantes finalmente estuvo integrado por trece alumnos, de los cuales se seleccionó el trabajo de seis participantes, quienes se destacaron por hacer aportaciones orales de manera constante en la clase y la información de sus hojas de trabajo estaba más detallada. Se buscó además que tuvieran diferentes niveles de aprovechamiento escolar: dos con un nivel bajo, dos con nivel intermedio y dos con nivel alto, para tener una visión más amplia al realizar el análisis de la propuesta didáctica modificada. A quienes se referirá en lo subsecuente como P-1, P-2, P-3, P-4, P-5 y P-6.

Se comentó a los alumnos, que estas actividades hacían parte de un estudio investigativo cuya intención era reducir al mínimo las alteraciones a la realidad del aula. Además, los participantes seleccionados, estuvieron trabajando con todo el grupo en un contexto escolar apegado a la cotidianidad, de forma que se pudo trabajar durante tres sesiones de 50 minutos cada una.

Instrumentos de recolección de datos

El método utilizado durante esta investigación fue la observación por ser una manera sistemática y selectiva de ver y escuchar una interacción o fenómeno a medida que se lleva a cabo. (Kumar, 2011). Además, se utilizaron como herramientas de apoyo grabaciones, archivos electrónicos, registros escritos realizados por los participantes en hojas de trabajo y notas realizadas por la investigadora.

- Grabaciones: a partir de este instrumento, se obtuvo información de los diálogos durante los procesos resolutivos planteados. Todas las grabaciones se transcribieron.

- Archivos electrónicos: permitieron recolectar el trabajo de los participantes y sirvieron en la reconstrucción del proceso seguido para resolver las actividades.

- Registros escritos realizados por los participantes en hojas de trabajo: fueron las anotaciones de las participantes realizadas en papel, tales como los cálculos numéricos o algebraicos, observaciones, y construcciones realizadas con las herramientas tecnológicas.

- Notas realizadas por la investigadora: elaboradas durante todas las sesiones de trabajo en las cuales se señalaron los acontecimientos relevantes con relación a la manera en que los participantes usaron las herramientas tecnológicas, los procesos de solución y los resultados que plantearon. Esta herramienta permitió triangular la información obtenida de las grabaciones.

Secuencia de actividades

Estuvieron conformadas por situaciones problemáticas acordes a la edad y a las características de los alumnos de primer grado de secundaria que pretendieron vincular lo que ya sabían, con el análisis de lo aprendido. Se buscaba favorecer la deducción de nuevas estrategias de solución.

Se tomó la decisión de que la situación problemática se situara en el contexto de fenómenos de movimiento rectilíneo uniforme e involucraran cantidades ligadas por una relación sencilla: la de proporcionalidad directa $y = ax$, pues era el primer acercamiento "formal" a la variable en una relación funcional.

El aula de clase estaba equipada con una computadora para cada alumno y el profesor titular contó con un equipo el cual se conectaba a un cañón. En cada equipo de cómputo se instaló GeoGebra5 para el desarrollo de las actividades.

Las preguntas planteadas pretendieron que el alumno (ver anexos 1 y 2):

- Reconociera la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada.

- Determinara los valores de la variable dependiente y los valores de la variable independiente.

- Simbolizará una relación funcional, con base en el análisis de los datos del problema.

Los estudiantes en un primer momento trabajaron de manera individual para que retomaran sus conocimientos previos al intentar resolver los problemas. En esta etapa el profesor aclaró sus dudas.

Después, el profesor los integró en parejas conforme fueron terminando el trabajo individual para que comentaran procedimientos y resultados, detectaran errores y en caso necesario hicieran correcciones. Finalmente expusieron el trabajo realizado al grupo, momento en el cual nuevamente se corregían o complementaban sus procedimientos y resultados.

Discusión y resultados

La actividad inició con la pregunta del profesor sobre lo que sabían los participantes sobre las gráficas de variación lineal, pero ningún respondió.

Figura 1. Objetivos de aprendizaje de la actividad propuesta.

Objetivos de aprendizaje.

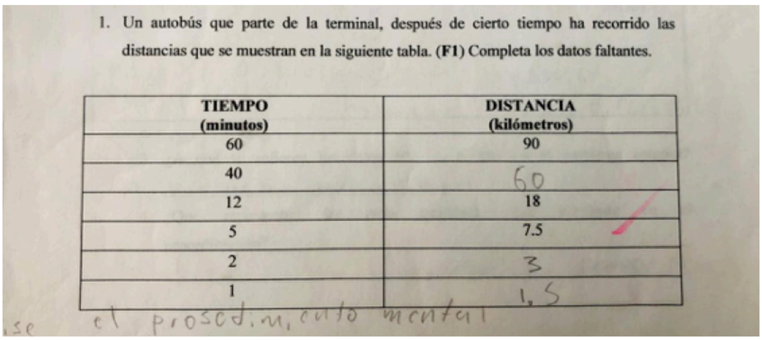
Que los alumnos:

- Reconozcan a partir del problema verbal, que existe una correspondencia entre los valores de las dos variables involucradas.
- Simbolicen la relación funcional de correspondencia.
- Determinen el valor de una de las variables cuando se conoce el valor de la otra.

Fuente: Elaboración propia (2021).

Al inicio de la actividad (Anexo 1), de manera individual, cada estudiante completó la tabla 1 y explicó por escrito su procedimiento.

Figura 2. Respuesta de P-4.



1. Un autobús que parte de la terminal, después de cierto tiempo ha recorrido las distancias que se muestran en la siguiente tabla. **(F1)** Completa los datos faltantes.

TIEMPO (minutos)	DISTANCIA (kilómetros)
60	90
40	60
12	18
5	7.5
2	3
1	1.5

se el prosedimiento mental

Fuente: Elaboración propia (2021).

P-4 fue el primero en terminar, relacionó las variables: 60 min con 90 km, dividiendo 60 entre 2 y al resultado (30), le sumó la cantidad que faltaba para obtener 90, es decir el número 60. Al darse cuenta de que haciendo esto obtenía los 90 km, aplicó el mismo procedimiento a los 12 minutos:

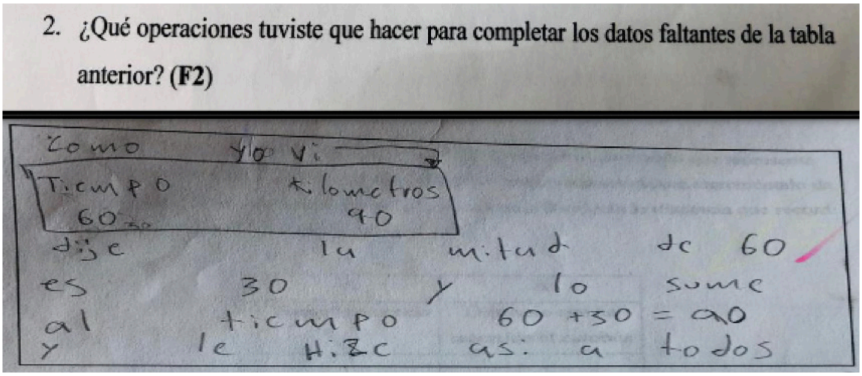
$$\frac{12}{2} = 6 + 12 = 18\,\text{km}$$

Así, llegó a la siguiente relación:

$$\frac{n}{2} + n = 1.5n$$

De esta forma comentó que corroboró su procedimiento y lo aplicó para calcular los kilómetros que faltaban en la tabla.

Figura 3. Respuesta de P-4.

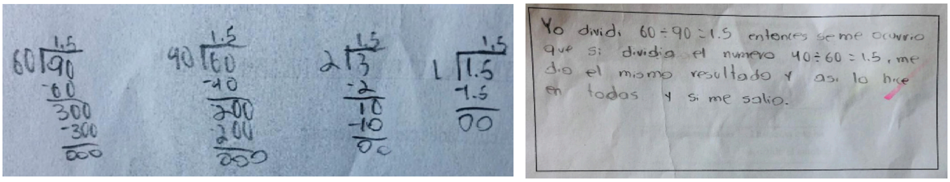


Fuente propia (2021).

P-3 dividió 90 km entre 60 min, obteniendo 1.5, luego 60 km entre 40 min, 3 km entre 2 min y 1.5 km entre 1 min. Así observó que en todas las divisiones debía obtener 1.5 y así fue como dedujo que las distancias calculadas estaban bien. La relación que encontró fue:

$$\frac{x}{y} = 1.5$$

Figura 4. Respuesta de P-3.

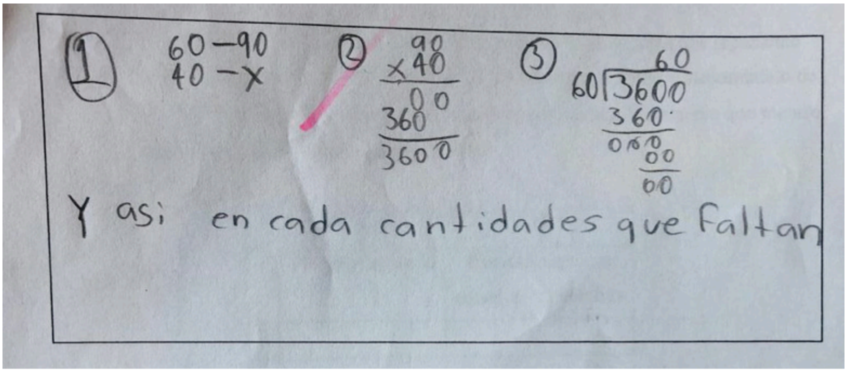


Fuente: Elaboración propia (2021).

Se desconoce por qué decidió dividir 60 entre 40, pues en la tabla no está impreso el 60 como la distancia correspondiente a 40 minutos. De esta forma, usó la constante de proporcionalidad para calcular los demás resultados y corroborar que sus resultados eran correctos.

El resto de los participantes escribió que utilizó la regla de tres, método sugerido por el profesor al inicio de la actividad:

Figura 5. Respuesta de P-5 al ítem 2.

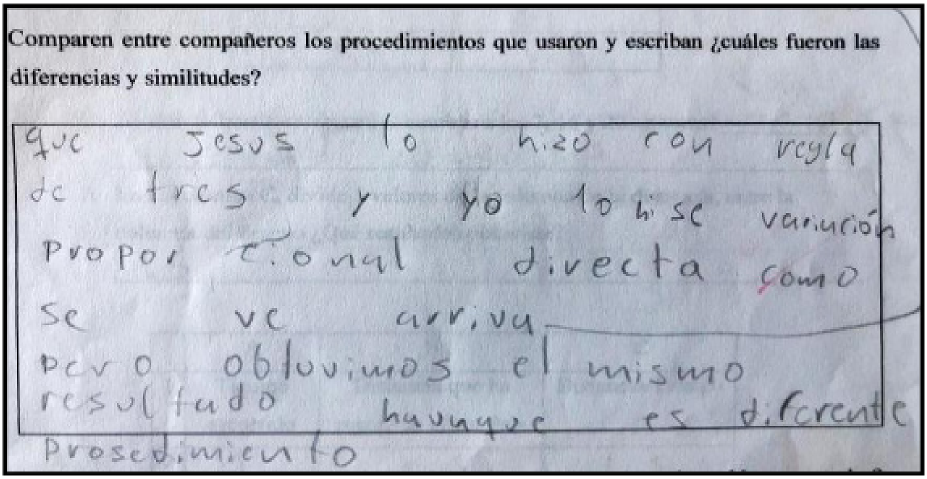


Fuente: Elaboración propia (2021).

Los participantes continuaron con la comparación de los procedimientos propios con los de sus compañeros y escribieron las diferencias.

Sólo el P-4, escribió que había diferencias en los procedimientos de solución, explicando que había hecho variación proporcional directa y que su compañero (con el que previamente había cotejado los resultados) había hecho una regla de tres. Sin embargo, habían obtenido los mismos resultados.

Figura 6. Respuesta de P-4.


Comparen entre compañeros los procedimientos que usaron y escriban ¿cuáles fueron las diferencias y similitudes?

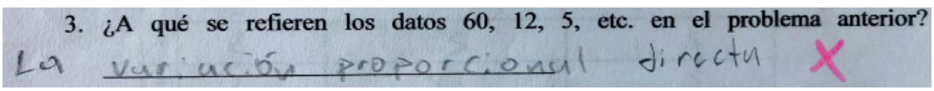
que Jesus lo hizo con regla de tres y yo lo hise variación proporcional directa como se ve arriva pero obtuvimos el mismo resultado haunque es diferente prosedimiento

Fuente: Elaboración propia (2021).

Se observó que haber explicado, previamente, por escrito su procedimiento, facilitó el proceso de comparación y discusión con sus compañeros.

Para profundizar en el análisis de los datos proporcionados en la tabla, escribieron a qué se referían los números 60, 12, 5, etc. (tiempo). En las hojas de trabajo, P-1, P-2 y P-3, identificaron que esas cantidades representaban a los minutos. P-4 escribió: “la variación proporcional directa”, P-5: “si multiplicas 12*5=60 tienen relación” y P-6: no contestó.

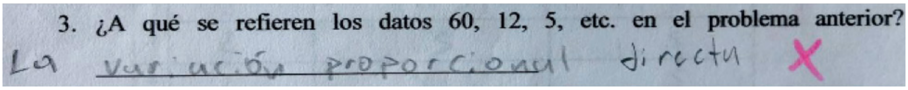
Figura 7. Respuesta de P-3.


3. ¿A qué se refieren los datos 60, 12, 5, etc. en el problema anterior?

La variación proporcional directa X

Fuente: Elaboración propia (2021).

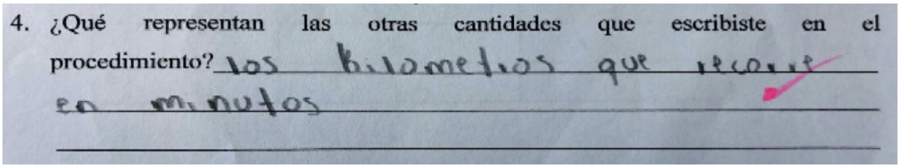
Figura 8. Respuesta de P-4.


3. ¿A qué se refieren los datos 60, 12, 5, etc. en el problema anterior?
La variación proporcional directa

Fuente: Elaboración propia (2021).

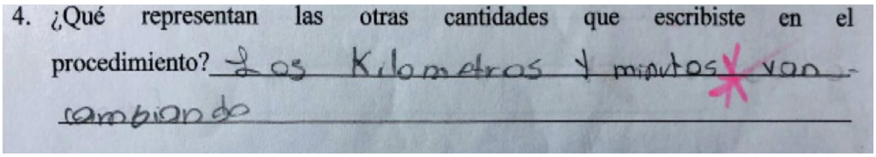
Con relación a las otras cantidades que trabajaron en su procedimiento, P-1, P-2 y P-5 escribieron: la distancia o kilómetros que recorrió el autobús. P-3: "los kilómetros y los minutos van cambiando", P-4: "la variación proporcional también" y P-6: no contestó.

Figura 9. Respuesta de P-2.


4. ¿Qué representan las otras cantidades que escribiste en el procedimiento? los kilometros que recorre en minutos

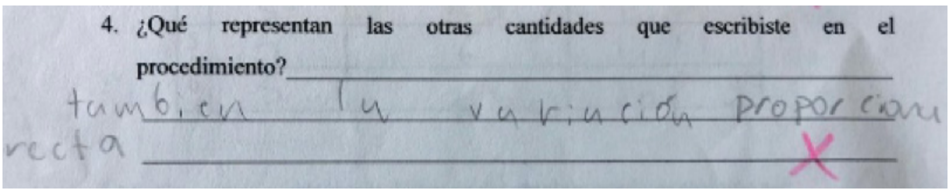
Fuente: Elaboración propia (2021).

Figura 10. Respuesta de P-3


4. ¿Qué representan las otras cantidades que escribiste en el procedimiento? Los Kilometros y minutos van cambiando

Fuente: Elaboración propia (2021).

Figura 11. Respuesta de P-4.


4. ¿Qué representan las otras cantidades que escribiste en el procedimiento?
tambien la variación proporciona recta

Fuente: Elaboración propia (2021).

El profesor señaló que esas dos preguntas hacían referencia a las variables, cantidades que van cambiando, las cuales en el problema eran el tiempo y la distancia. Agregó que una variable dependía de la otra, por lo que a una de esas variables se le conocía como variable dependiente.

Para la siguiente actividad, los participantes usaron GeoGebra5. En la ejecución de estas actividades continuaron trabajando con la correspondencia entre las variables relacionadas, así como en la determinación de los valores de la variable independiente, dados los valores de la variable independiente.

Durante la actividad, se apreciaron las interacciones entre alumno-alumno y alumno-profesor, que se proponen en el enfoque didáctico, así como la posición activa del alumno al escribir en las celdas, el método heurístico de su preferencia.

Las representaciones que realizó P-1 con ayuda del *software* de geometría dinámica, le permitieron encontrar nuevas relaciones, que con lápiz y papel no había encontrado.

Figura 12. Descripción.

5. Utiliza una hoja de cálculo en Geogebra5 para obtener una tabla que represente esta situación. En la columna ***A*** coloca el tiempo transcurrido e incrementalo de minuto en minuto hasta 20min. En la columna ***B*** calcula la distancia del autobús con la fórmula general. **(F3)**

	A	B
1	Tiempo recorrido	Distancia en la que se ubica el autobús
2		
3		
4		

Fuente: Elaboración propia (2021).

P-1, fue el primero en terminar. En su procedimiento podemos observar que calcular la distancia recorrida desde el minuto uno, le permitió identificar la constante de proporcionalidad al relacionar que cada minuto, el autobús recorría 1.5 km, así pudo establecer entonces, la fórmula "distancia = 1.5 (tiempo)" y usarla para calcular el resto de las distancias, como se planeó con base en la metodología de resolución de problemas y uso de herramientas tecnológicas digitales. El *software* permitió de manera adicional, comparar sus resultados con lo que había hecho con lápiz y papel:

Figura 13. Descripción.

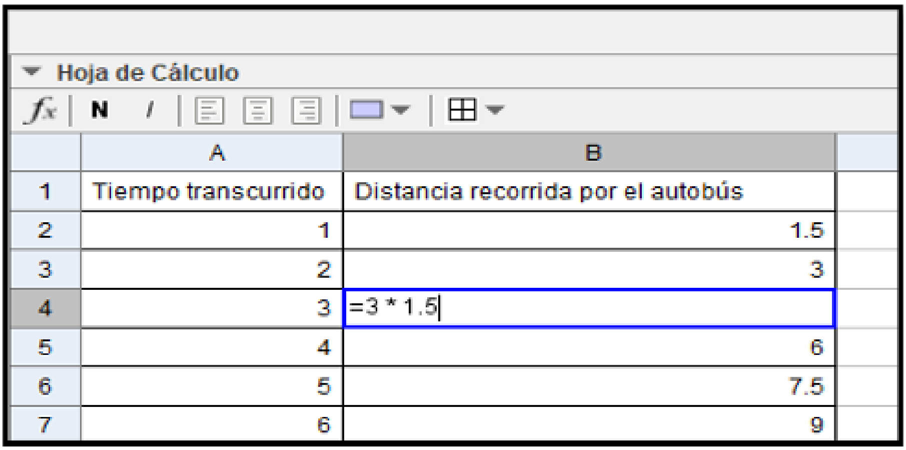
P-1: Poniendo el resultado que nos salió en 1, que es 1.5 y lo multipliqué por el número de minutos.

Profesor: ¿Por qué por 1.5?

P-1: Es lo que equivale a 1 minuto.

Fuente: Elaboración propia (2021).

Figura 14. Trabajo realizado por P-1.



Hoja de Cálculo

	A	B
1	Tiempo transcurrido	Distancia recorrida por el autobús
2	1	1.5
3	2	3
4	3	=3 * 1.5
5	4	6
6	5	7.5
7	6	9

Fuente: Elaboración propia (2021).

Mientras tanto, P-2 aplicó el procedimiento que encontró usando lápiz y papel:

$$\frac{n}{2} + n = 1.5n$$

Figura 15. Descripción.

Hoja de Cálculo

	A	B
1	Tiempo transcurrido	Distancia recorrida por el autobús
2	1	1.5
3	2	3
4	3	4.5
5	4	=4 / 2 + 4
6	5	7.5
7	6	9
8	7	10.5
9	8	12

Fuente: Elaboración propia (2021).

En el guion seguido por el profesor, se sugiere que éste los conduzca para que lleguen a la relación:

(1.5) (kilómetros) = minutos

De esta forma, el estudiante pudo construir la tabla 1 en GeoGebra5, pero en la práctica no fue necesario hacerlo, ya que construyeron su tabla con los métodos encontrados a lápiz y papel.

Figura 16. Descripción.

Profesor: ¿Qué son el tiempo y la distancia?

P-3: Variables, porque varían, van cambiando.

Profesor: Encontraron una constante ¿Cuál fue el número que multiplicaron por el tiempo?

P-1: 1.5, era lo que se recorría en un minuto.

Profesor: - ¿Qué podemos hacer, si ahora queremos saber la distancia recorrida por el autobús en tres horas? - Nadie contestó - ¿Cuántos minutos hay en tres horas?

P-3: 180 minutos.

P-1: 180 minutos por 1.5. El profesor asintió.

Fuente: Elaboración propia (2021).

Calcularon la distancia correspondiente a 7, 6 y 20 minutos.

Figura 17. Descripción.

P-1: 7 minutos es igual a 10.5, porque la mitad de 7 es 3.5+7.5=10.5.

Profesor: ¿Y la distancia correspondiente a 16 min?

P-1: 24 kilómetros porque 16*1.5=24.

Fuente: Elaboración propia (2021).

Posteriormente construyeron una tercera columna, en la que debían dividir la distancia entre el tiempo.

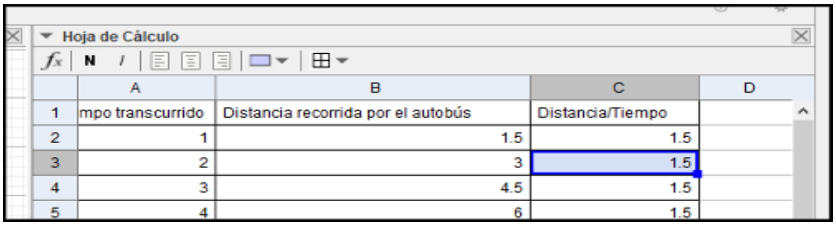
Figura 18. Trabajo realizado por P-3.

	A	B	C
1	mpo transcurrido	Distancia recorrida por el autobús	Distancia/Tiempo
2	1	1.5	1.5
3	2	3	1.5
4	3	4.5	1.5
5	4	6	1.5
6	5	7.5	1.5
7	6	9	=9 / 6
8	7	10.5	1.5

Fuente: Elaboración propia (2021).

Al comparar resultados de manera grupal, los participantes identificaron que cuando el tiempo y la distancia eran correspondientes, al dividirlos, se obtenía el mismo cociente. En esta dirección, la constante de proporcionalidad les permitió verificar que las distancias que habían calculado eran correctas. De esta forma, la construcción de la tabla 1 en la hoja de cálculo, sirvió como introducción al concepto de relación funcional entre variables.

Figura 19. Trabajo realizado por P-6



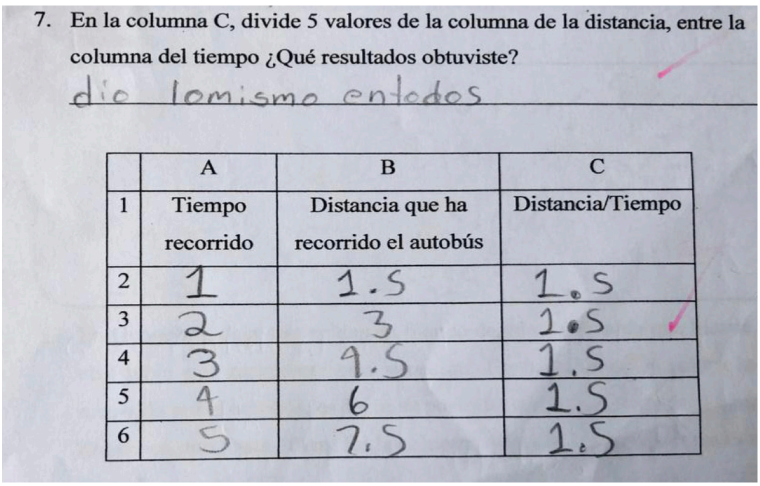
Hoja de Cálculo

	A	B	C	D
1	mpo transcurrido	Distancia recorrida por el autobús	Distancia/Tiempo	
2	1	1.5	1.5	
3	2	3	1.5	
4	3	4.5	1.5	
5	4	6	1.5	

Fuente: Elaboración propia (2021).

En las hojas de trabajo sólo escribieron los resultados del tiempo, la distancia y la constante de proporcionalidad.

Figura 20. Respuesta de P-5.



7. En la columna C, divide 5 valores de la columna de la distancia, entre la columna del tiempo ¿Qué resultados obtuviste?

dio lomismo entodos

	A	B	C
1	Tiempo recorrido	Distancia que ha recorrido el autobús	Distancia/Tiempo
2	1	1.5	1.5
3	2	3	1.5
4	3	4.5	1.5
5	4	6	1.5
6	5	7.5	1.5

Fuente: Elaboración propia (2021).

La construcción de la tabla en la hoja de cálculo introduce a los estudiantes al concepto de relación funcional entre variables.

Para concluir, P-4 leyó la información sobre la fórmula general

Figura 21. Descripción.

Si te das cuenta, una posible fórmula para calcular la distancia del autobús puede expresarse así:

$$a * \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$$

1.5* (tiempo transcurrido) = distancia del autobús en kilómetros

donde a representa un número constante, y las variables están representadas por **"*x*"** y **"*y*"**.

Fuente: Elaboración propia (2021).

Conclusiones

Durante la implementación de las actividades, se pudo observar que los participantes formularon preguntas y reflexionaron abiertamente sobre los conceptos, problemas y estrategias cognitivas y metacognitivas de resolución, que no necesariamente han sido enseñados con anterioridad a los estudiantes. Este hecho muestra que existe una disposición matemática en los aprendizajes (Santos Trigo, 2014 y SEP, 2017).

Se tienen indicios de que los participantes manifestaron en diferentes momentos, las cuatro categorías, propuestas por Schoenfeld (1985): a) el empleo de recursos básicos o hechos y procedimientos específicos; b) el uso de estrategias cognitivas (conjunto de heurísticas); c) el empleo de estrategias de monitoreo o autoevaluación (metacognitivo); y d) las creencias de los estudiantes acerca de las matemáticas y la resolución de problemas.

Complementariamente, teniendo en cuenta los registros de las transcripciones, se tienen indicios de que el uso de tecnología digital favoreció el logro de los objetivos de aprendizaje planeados, aun cuando les faltaban conocimientos previos como la ejecución de operaciones básicas (multiplicación y división), el plano cartesiano, ubicación de puntos en el plano cartesiano y el uso de algunas funciones del *software*.

El apoyo didáctico del docente como titular del grupo fue fundamental, ya que éste sugería posibles respuestas a las que los alumnos debían llegar; así como detonaba preguntas o ideas que los estudiantes plantearon con la intención de identificar diferentes caminos de actuación y poder así realizar procesos metacognitivos (Santos Trigo, 2014). De otra forma podemos decir que aun sin ser especialistas en matemáticas y su enseñanza (lo cual ocurre por el perfil de los profesores de Telesecundaria en México), se puede trabajar con el enfoque epistemológico y la metodología didáctica que se propone en las actividades de esta investigación.

Finalmente se pudo observar que el docente hizo las aportaciones que, desde su perspectiva, consideró adecuadas, pues bien sea retomando las sugeridas en la investigación, complementándolas o haciendo comentarios totalmente diferentes a lo escrito en el documento, se lograron las actividades planteadas. Sería deseable en un futuro, que los profesores conozcan a profundidad el modelo educativo y la metodología didáctica con los cuales van a trabajar. Ya que su papel y participaciones durante el proceso de aprendizaje será determinado por estos referentes, pues al hacer el análisis de la información recolectada en las grabaciones y las hojas de trabajo, fue notorio que los comentarios del profesor influyeron en el tipo de procedimientos, argumentos y conclusiones a los que llegaron los estudiantes.

Referencias bibliográficas.

Kumar, R. (2011). *Research Methodology. A step-by-step guide for beginners*. 3 ª. Ed.- Gran Bretaña: Mixed Sources.

McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa*. -5ª. Ed.-, Madrid, España: Pearson educación S. A.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Santos, L. M. (2014). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. -2 ª. Ed.- Ciudad de México, México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, EUA: Academic Press.

Secretaría de Educación Pública [SEP] (2017). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y programas de estudio para la educación básica*. Ciudad de México, México: SEP.

Ursini S., Escareño F., Montes D. y Trigueros M. (2016). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. Ciudad de México, México: Trillas.

Anexos

Anexo 1. Guion didáctico para el profesor.

GUION PARA EL PROFESOR

Objetivos de aprendizaje.

Que los alumnos:

- Reconozcan a partir del problema verbal, que existe una correspondencia entre los valores de las dos variables involucradas.
- Simbolicen la relación funcional de correspondencia.
- Determinen el valor de una de las variables cuando se conoce el valor de la otra.

INSTRUCCIONES. Lee el enunciado del problema y completa la tabla.

1. Un autobús que parte de la terminal, después de cierto tiempo ha recorrido las distancias que se muestran en la siguiente tabla. (**F1**) Completa los datos faltantes.

TIEMPO (minutos)	**DISTANCIA (kilómetros)**
60	90
40	60
12	18
5	7.5
2	3
1	1.5

Después de observar la tabla pregunte, ¿Cuáles son los datos del problema que proporcionan información para poderlo resolver?

Realiza lo que se te pide.

2. ¿Qué operaciones tuviste que hacer para completar los datos faltantes de la tabla anterior? (**F2**)

Los posibles procedimientos que usarán los alumnos son:

$90 \div 60 = 1.5$ 30*1.5=45 $\frac{60}{30} = \frac{90}{x=45}$

Escriba las comparaciones entre compañeros los procedimientos que usaron y escriban ¿cuáles fueron las diferencias y similitudes?

3. ¿A qué se refieren los datos 60, 12, 5, etc. en el problema anterior? El tiempo en minutos. ______________________

4. ¿Qué representan las otras cantidades que escribiste en el procedimiento?

El 90, 60, 18, 7.5, 3 y 1.5 representan la posición del autobús en un tiempo determinado. El 1.5 representa la posición que ocupará el autobús después de un minuto.

Si los alumnos utilizan la regla de tres, escriba en el pizarrón las fracciones equivalentes, para este ejemplo: $\frac{45}{30}$ y $\frac{90}{60}$, pregunte ¿Qué operación tendrían que hacer si sólo conocieran el tiempo para poder calcular los kilómetros?

Si los estudiantes hacen procedimientos donde no aparece la constate 1.5, pregunte ¿qué distancia recorre el autobús en un minuto? con la intención de guiarlos para llegar a esta representación:

La operación que hiciste probablemente fue:

1.5*60=90

Una fórmula general para hacer esto es:

1.5* (tiempo transcurrido) = ubicación del autobús en kilómetros

5. Utiliza una hoja de cálculo en GeoGebra5 para obtener una tabla que represente esta situación. En la columna **A** coloca el tiempo transcurrido e incrementalo de minuto en minuto hasta 20min. En la columna **B** calcula la distancia que recorre el autobús con la fórmula general. (**F3**)

	A	B
	Tiempo transcurrido	Distancia que ha recorrido el autobús
1	1	=A1*1.5
2	2	=A2*1.5
3	3	=A3*1.5
4	4	=A4*1.5
5	5	=A5*1.5

Donde A1, A2, etc. representan el nombre de la columna, cuyos valores se multiplicarán por 1.5, lo cual permitirá que al seleccionar dos celdas y arrastrar el cursor hacia abajo se copie la fórmula en el resto de la columna.

6. ¿A qué distancia se ubicará el autobús a los 7, 16 y 20 minutos? 10.5km, 24km y 30km____

7. En la columna C, divide 5 valores de la columna de la distancia, entre la columna del tiempo ¿Qué resultados obtuviste? __________________

	A	B	C
1	Tiempo transcurrido	Distancia que ha recorrido el autobús	Distancia/Tiempo
2	1	=A1*1.5	= Seleccionar celda de la columna B/ la celda de la columna A
	2	=A2*1.5	
4	3	=A3*1.5	
5	4	=A4*1.5	
6	5	=A5*1.5	

Haga hincapié en que 1.5 es la constante de proporcionalidad tanto para calcular el tiempo, como la distancia y que cuando se divide distancia sobre tiempo se está hablando de velocidad.

Una posible fórmula para calcular la distancia del autobús puede expresarse así:

$$a * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

Es decir: 1.5* (tiempo transcurrido) = distancia del autobús en kilómetros

En donde “a” representa un número constante, y las variables están representadas por “***x***” y **“*y*”.**

Compara y discute tus respuestas con tus compañeros.

Fuente: Elaboración propia (2021).