Capítulo 7

POSIÇÃO RELATIVA DE RETAS NO ESPAÇO: O COMPUTADOR ENTRE O QUE OS OLHOS E A MENTE VEEM

Relative position of lines in space: the computer between what the eyes and mind see

Paulo Diniz
Universidade Licungo. Beira, Moçambique
https://orcid.org/0000-0001-9573-7897
padibene2@yahoo.com.br

Resumo. O presente trabalho tem o objetivo de descrever aspectos relevantes de uma experiência de ensino com estudantes de Licenciatura em Ensino de Matemática, na Universidade Licungo, em Moçambique. Essa experiência de ensino foi motivada pelo baixo desempenho dos estudantes quando resolveram um teste escrito na disciplina de geometria analítica. Com foco em uma das questões que compunham o teste escrito, surgiu a necessidade de responder a seguinte pergunta:

Como discutir a resolução da tarefa matemática exposta aos estudantes para que eles compreendam a racionalidade da produção da sua solução? Para responder a essa pergunta foi necessário realizar um experimento de ensino, em sala de aula, onde o estudantes foram observados em atividade matemática e desencadeados processos de interação professor-aluno. Os resultados mostraram que os estudan-

Cita este capítulo

Diniz, P. (2022). Posição relativa de retas no espaço: o computador entre o que os olhos e a mente veem. En: Villota Enríquez. J. A.; González Valencia. H. y Medina Agredo, P. (eds. científicos). *Educación y sociedad: cambios y transformaciones desde la ciencia y la tecnología*. (pp. 183-201). Cali, Colombia: Editorial Universidad Santiago de Cali.

tes tinham dificuldades de relacionar os textos representados pelos desenhos que faziam nos seus cadernos e os textos emergentes da elaboração algébrica das soluções. Com isso, ficou evidente a contribuição do computador para dissipar aparentes incongruências entre os resultados obtidos através de desenhos em papel e da análise vetorial.

Palavras-chave: Geometria, Visualização, Computador, Reta.

Abstract. The present work aims to describe relevant aspects of a teaching experience with undergraduate students in Mathematics Teaching, at Universidade Licungo, in Mozambique. This teaching experience has been motivated by the low performance of the students when they solved a written test in the subject of Analytical Geometry. With a focus on one of the questions that made up the written test, it was necessary to answer the following question: How to discuss the resolution of the mathematical task exposed to students so that they understand the rationality of the production of their solution? To answer this question, it was necessary to carry out a teaching experiment, in the classroom, where students were observed in mathematical activity and triggered teacher-student interaction processes.

The results showed that students had difficulties in relating the texts represented by the drawings they made in their notebooks and the texts emerging from the algebraic elaboration of the solutions. With this, it was evident the computer's contribution to dispel apparent inconsistencies between the results obtained through paper drawings and vector analysis.

Keywords: Geometry, Visualizartion, Computer, Line.

Resumen. El presente trabajo tiene como objetivo describir aspectos relevantes de una experiencia docente con estudiantes de pregrado en Enseñanza de Matemáticas, en la Universidade Licungo, en Mozambique. Esta experiencia docente ha estado motivada por el bajo rendimiento de los alumnos a la hora de resolver una prueba escrita en la asignatura de Geometría Analítica. Con foco en una de las preguntas que componían la prueba escrita, fue necesario responder la siguiente pregunta:

¿Cómo discutir la resolución de la tarea matemática expuesta a los estudiantes para que comprendan la racionalidad de la producción de su solución? Para responder a esta pregunta, fue necesario llevar a cabo un experimento de enseñanza, en el aula, donde los estudiantes fueron observados en la actividad matemática y desencadenaron procesos de interacción profesor-alumno. Los resultados mostraron que los estudiantes tuvieron dificultades para relacionar los textos representados por los dibujos que realizaron en sus cuadernos y los textos emergentes de la elaboración algebraica de las soluciones. Con esto, se hizo evidente la contribución de la computadora para disipar aparentes inconsistencias entre los resultados obtenidos a través de dibujos en papel y análisis vectorial.

Palabras clave: Geometría, Visualización, Ordenador, Línea.

Introdução

A Geometria quando bem explorada, oferece um grande campo de actividades onde os alunos podem utilizar diferentes artefactos e/ou ferramentas tecnológicas na exploração de diversos tipos de investigação geométrica. No conjunto de possíveis investigações geométricas podemos considerar, por exemplo, as seguintes:

(a) Utilizando o Tangram ou Pavimentações, procurar figuras imersas nelas;

(b) Completar figuras de forma a se assemelharem a outras dadas;

(c) Construir figuras geométricas utilizando diversos materiais;

(d) Encontrar todos os quadrados num geoplano 5x5;

(e) Desenhar urna figura simétrica de urna dada;

(f) Encontrar figuras iguais a urna dada mas com orientações diferentes;

(g) Descobrir o ângulo entre duas rectas no espaço.

O desenvolvimento desse tipo de actividades, faz apelo ao conceito de visualização. Em linguagem popular, tal como considerado por Senechal (1991), a palavra visualização pode significar percepção espacial, correspondendo a reconstrução mental da representação de objectos em três dimensões. A ideia de percepção espacial, está inserida no que podemos chamar de pensamento visual que, para Senechal (1991), é o que fazemos quando reconhecemos rapidamente e manipulamos automaticamente símbolos de qualquer espécie.

Vamos assumir, neste trabalho, o conceito de visualização tal como é apresentado por Flores, Wagner e Buratto (2012, p. 33) quando citam Presmeg (1986), que considera a visualização como um *processo de construção e transformação de imagens mentais bem como de todo tipo de inscrições de natureza espacial, ambos usados na matemática*. A referência à Matemática, nessa definição, nos remete aos processos de visualização inscritos no contexto específico de ensino de conteúdos matemáticos. Nisso, propomos expor, sem intenção de aprofundar, a noção de visualização matemática, definida por Flores (2010) como o processo de formação de imagens e utilização dessas imagens para descobrir e compreender a Matemática.

Aprender Matemática, em particular Geometria, apela a realização de actidades que podem envolver as capacidades de visualização espaciais dos alunos. Além da aprendizagem da Geometria, a visualização espacial engloba um conjunto de capacidades relacionadas com a maneira como os alunos percepcionam o mundo em sua volta, e com a capacidade desses de interpretar e modificar os objectos.

Deve ser nesse contexto que muitos educadores matemáticos têm procurado formas de ultrapassar as dificuldades perceptuais que muitos alunos enfrentam na compreensão de desenhos de figuras no espaço tridimensional, na interpretação de representações visuais de conceitos matemáticos e no estudo dos processos relacionados com a imaginação de entidades rnaternáticas.

Na senda dessas preocupações, pretende-se, com o presente trabalho, relatar uma ***experiência de ensino*** em que emergiu um problema inesperado, no contexto de ensino da Geometria Analítica, com estudantes do primeiro ano do Curso de Licenciatura em Ensino de Matemática, na Universidade Licungo – Beira. Em um teste escrito, entre outras questões, aos estudantes foi colocada a seguinte tarefa matemática:

Sejam "r" e "s", equações de duas rectas do espaço tridimensional:

r: *x* = 2 + t Ù *y* = -3 Ù z = 4

s: *x* = 2 Ù *y* = -3 + t Ù z = 4 + t

a) Representar "r" e "s" graficamente, num único sistema de co-ordenadas cartesianas.

b) Qual é a posição relativa das duas rectas?

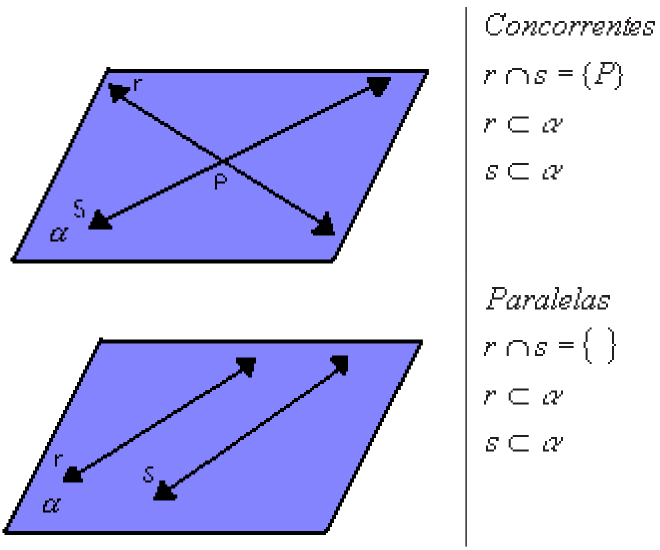
O objetivo dessa tarefa matemática era de desafiar a capacidade dos alunos na sua percepção espacial da posição relativa entre as duas rectas, tendo em consideração as perspectivas teóricas abordadas na disciplina de geometria analítica. Após a correção do teste, notou-se que a maioria dos estudantes respondeu erradamente a essa tarefa, tal como ilustra a tabela a seguir.

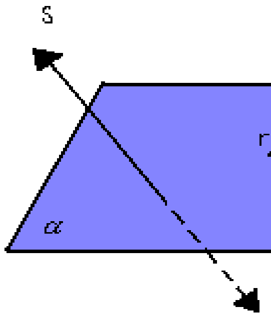
Tabela 1. *Respostas dos estudantes da tarefa sobre posição relativa das rectas r e s* (N = 35).

Respostas	r e s são Coincidentes	r e s são Concorrentes Oblíquas	r e s são Cruzadas
Número de estudantes	14	16	5

Os estudantes responderam a essa questão tendo em conta os gráficos que desenharam em seus cadernos. As figuras 3, 4 e 5, ilustram alguns desses gráficos. Eles consideram que retas coincidentes são aquelas que têm uma infinidade de pontos comuns. Rectas concorrentes oblíquas, conforme explicaram, são as que possuem apenas um ponto de interseção. Enquanto isso, consideram cruzadas as rectas não paralelas que se encontram em planos diferentes e que não se intersetam. No entanto, formalmente, quando se aborda a posição relativa de duas retas no espaço, três possibilidades são apresentadas (JACIR, 1949) conforme ilustrado nas figuras 1 e 2:

Figura1. posição relativa de duas retas no espaço.



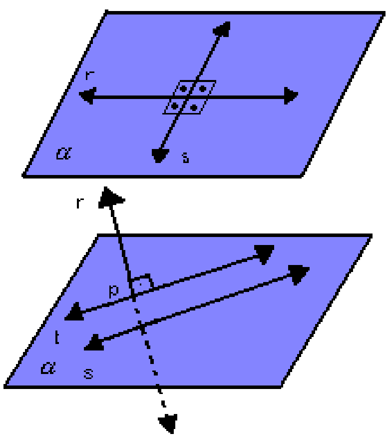


Reversas
A interseção entre r e s é vazia.
Ou seja, não existe um plano que contenha as duas retas simultaneamente

Fonte: Adaptado de Jacir (1949, pp: 198-200)

Dois casos adicionais são considerados (a) duas retas r e r são ortogonais se formarem entre si um ângulo reto e (b) duas retas r e s são perpendiculares se além de formarem um ângulo reto forem concorrentes.

Figura 2: retas perpendiculares e retas ortogonais.



retas perpendiculares: $r \perp s$

retas ortogonais: $r \perp s$

$r \perp t$ e $r \perp s \Rightarrow t \,//\, s$

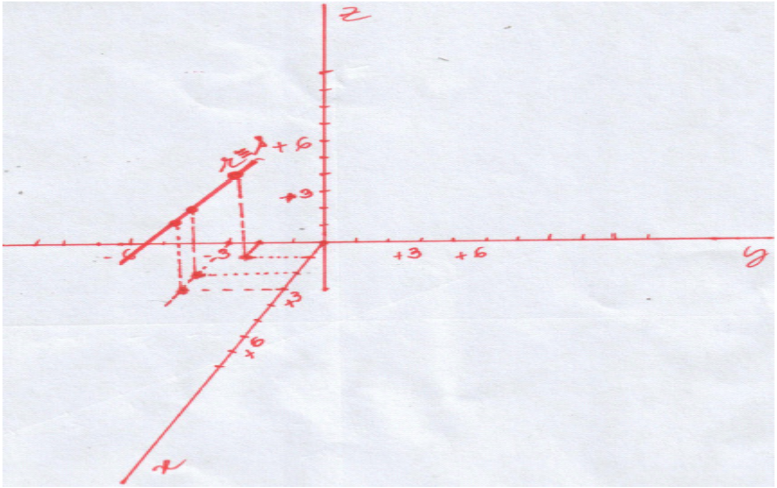
$t \subset \alpha$

$s \subset \alpha$

Fonte: Adaptado de Jacir (1949, pp: 198-200)

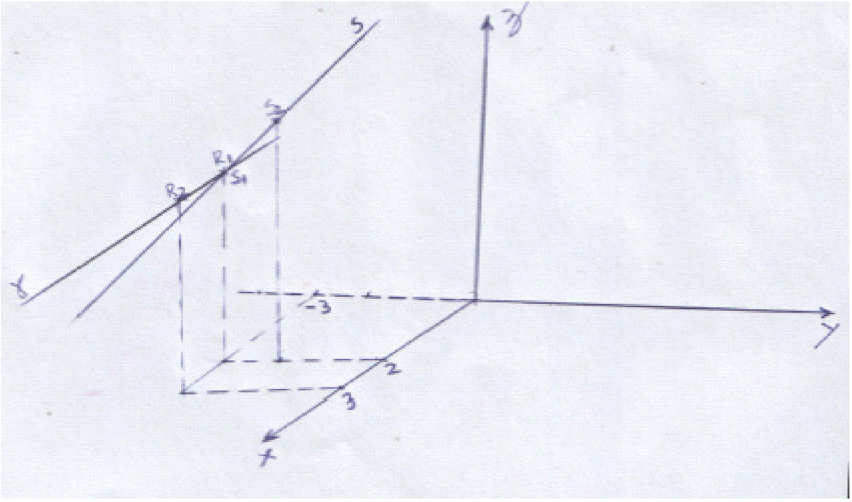
Note-se que o que os estudantes consideraram como retas coincidentes, corresponde ao caso particular de rectas paralelas. As retas concorrentes obliquas referidas pelos estudantes, significam as que classificamos, formalmente, como concorrentes. Finalmente, as retas reversas foram designadas pelos estudantes como retas cruzadas.

Figura 3. As retas r e s são coincidentes (resposta de estudantes).



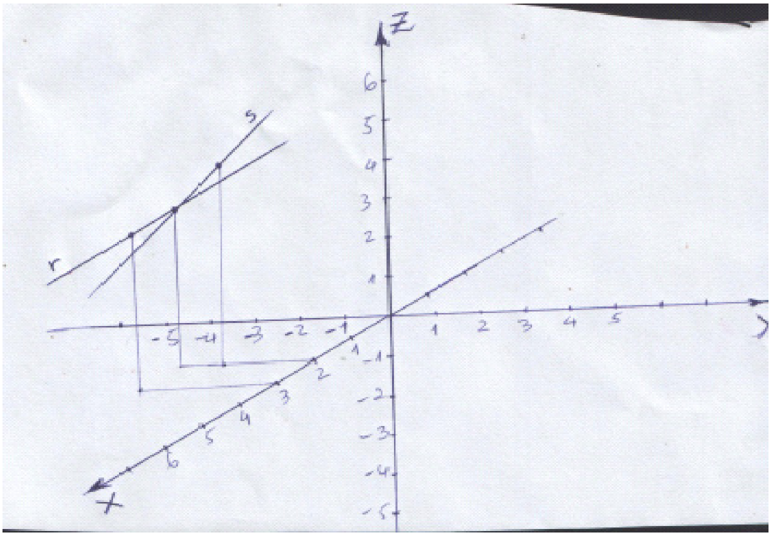
Fonte: O autor (2020).

Figura 4. As retas r e s são concorrentes obliquas (resposta de estudantes).



Fonte: O autor (2020).

Figura 5. As retas r e s são cruzadas (resposta de estudantes).



Fonte: O autor (2020).

Quando pedidos para justificarem as suas respostas, os estudantes responderam como se pode ler no trecho de conversa seguinte:

Professor: *Para os que dizem que r e s são coincidentes podem dizer porquê?*
Estudante A: ... *r e s são coincidentes porque é visível no gráfico.*
Professor: E *os que consideram r e s concorrentes o que dizem? Porque são concorrentes obliquas?*
Estudante B: *São concorrentes porque têm um ponto comum,..., as rectas se intersectam num único ponto.*
Professor:*Muito bem, qual é o ângulo formado por r e s, sabendo que se intersetam num ponto?*
Estudantes: ...30º, 28º, 43º, 32º, etc. [eles mediam o ângulo entre r e s, nos seus desenhos]
Professor: *Os que afirmam que r e s são cruzadas como justificam?*
Estudante C: ...*eu acho que são cruzadas porque não se tocam* [significando que as retas não se intersetam] .
Professor: *Mas os vossos desenhos mostram uma interseção das retas! E ai..., o que dizem?*
Estudantes: ... [silêncio] .

Problema: Com base nas respostas dadas pelos estudantes, um problema fica evidente: eles não consideram o que estão a ver como sendo projeções de retas do espaço no plano. Dado o exposto, surgiu a seguinte questão: ***Como discutir a resolução da tarefa matemática exposta aos estudantes para que eles compreendam a racionalidade da produção da sua solução?***

Desenvolvimento

Começaremos o desenvolvimento deste trabalho apresentando os contornos da experiência de ensino e, de seguida, iremos discutir os resultados dessa experiência. No fim, apresentaremos algumas ideias sobre como o computador poderia auxiliar nessa experiência de ensino.

Descrição da experiência de ensino

Depois de se constatar que os estudantes apresentavam dificuldades na resolução da tarefa, o professor optou por dar alguns impulsos para ajudá-los. Para tal, começou por pedí-los para resolverem outras tarefas de apoio como as que se seguem:

> **Dados t1 = 0 e t2 = 1 determine os pontos R1 e R2 da reta r.**
>
> **Dados t1 = 0 e t2 = 1 determine os pontos S1 e S2 da reta s.**
>
> **Com base nos pontos R1 e R2 encontre um vector que tenha a mesma direção de r.**
>
> **Com base nos pontos S1 e S2 encontre um vector que tenha a mesma direção de s.**

O objetivo dessas tarefas adicionais era de conduzir os estudantes a utilizarem a análise vetorial, como uma via alternativa, para chegarem ao resultado desejado sobre as posições relativas das retas r e s. Primeiramente, os estudantes determinaram os pontos $R_1(2 ; -3 ; 4)$,

$R_2(3 ; -3 ; 4)$, $S_1(2 ; -3 ; 4)$ e $S_2(2 ; -2 ; 5)$ e constataram que $R_1(2 ; -3 ; 4)$ e $S_1(2 ; -3 ; 4)$ são pontos coincidentes. Concluiram, então, que as duas retas não têm a mesma direção, pois o ponto R_2 não está na reta s. Assim, definitivamente, descartaram a possibilidade das duas retas serem coincidentes.

Após determinarem os vetores de direção das duas retas, dr = (1;0;0) e ds = (0;1;1), os estudantes calcularam, sob orientação do professor, o produto escalar dos dois vetores dr*ds = (1;0;0)*(0;1;1) = 0. Interpretando esse resultado, concluiram que os vetores são perpendiculares e, consequentemente, as respectivas retas, também o são.

Para a maior confusão, nenhum dos gráficos dos estudantes parecia concordar com esse resultado! Qual é o problema? Será o caso de uma contradição? A possibilidade de uma contradição não estava fora de questão, tal como pode confirmar o seguinte trecho de conversa entre o professor e alguns alunos:

> ***Professor*** *Que comentários podem fazer com base no resultado que obtiveram? Produto escalar igual a zero?*
> ***Estudante D***: *... me parece haver uma contradição, professor, entre o que vejo no gráfico e o resultado calculado.*
> ***Professor:*** *O que pode estar por detrás dessa aparente contradição?*
> **Estudante E:** *Professor, talvez haja problemas com a posição dos eixos. Por exemplo, quando desenho o sistema cartesiano ortogonal, apenas dois dos três eixos são perpendiculares entre si e o terceiro não é perpendicular a nenhum dos outros dois.*
> **Estudante F:** *... deve ser porque estamos a desenhar rectas no plano, no papel,...,. seria melhor se mostrássemos esse fenómeno usando pausinhos, ...!*

A discussão em sala de aula ficou intensa e alguns alunos já se movimentavam tentando mostrar o que estava acontecendo usando canetas, lápis, livros, pedaços de giz e vários outros objetos que encontravam dentro da sala. Restavam apenas 17 minutos para o final da aula. O professor chamou cinco estudantes ao quadro. Um deles segurou duas canetas concorrentes sob um ângulo de aproximadamente 90º. Os outros quatro estudantes, em posições diferentes, ficaram observando as duas canetas. A eles pediu-se que fossem desenhar, no quadro, o que tinham visualizado. Quatro desenhos diferentes, reflectindo visões diferentes dos estudantes, foram feitos no quadro. Com essa atividade, os estudantes perceberam que a projeção de retas no plano, às vezes, pode produzir resultados equivocados e a forma dessas projeções (nos desenhos) depende, entre outros fatores, da posição do observador e do rigor de quem desenha no papel ou no quadro.

Discussão dos resultados da experiência de ensino

A Geometria é um dos tópicos matemáticos amplamente discutidos nas escolas moçambicanas. Em Moçambique, os alunos começam a aprender conceitos geométricos simples muito cedo, ou seja, no ensino primário (1º ao 7º ano), mas é apenas no 10º ano (alunos de 16 anos) que a geometria espacial é introduzida.

Na 10ª classe surgem muitas dificuldades em compreender e lidar com os conceitos de geometria espacial entre professores e alunos, como foi reconhecido pelo Projeto de Apoio a Formação de Professores (STTP, 2005). Um inquérito realizado pelo STTP a professores de Matemática do ensino secundário em todo o país revelou que os professores acreditavam que a geometria espacial é um dos tópicos mais difíceis de ensinar, entre outros, como probabilidade e trigonometria. O inquérito foi conduzido por docentes universitários e teve como objetivo ajudar na produção de materiais didáticos de apoio aos professores de Matemática do ensino secundário para garantir um ensino e uma aprendizagem de qualidade nas escolas moçambicanas.

As dificuldades em compreender os conceitos geométricos, em Moçambique, não se limitam apenas ao nível do ensino secundário, mas também podem ser encontradas em no nível universitário. Ao nível superior de escolaridade, por exemplo, há estudantes com muitas dificuldades em interpretar situações geométricas quando estas são representadas graficamente em um sistema tridimensional. Isso vai de acordo com o problema que relatamos na experiência de ensino deste trabalho. E com essa experiência, aprendemos que a visualização com material concreto na aula de Geometria é algo muito importante e ajuda o aluno a entender o conteúdo matemático.

Percebemos, também, que nesse processo (de visualização), gráficos, diagramas, imagens e formas ou modelos geométricos são importantes ferramentas para a visualização de conceitos abstratos em Matemática (KONYALIOGLU, 2003). Ao usar a abordagem de visualização, muitos conceitos matemáticos podem tornar-se claros e simples para os alunos entenderem..

Na perspectiva da nossa discussão, no presente trabalho, consideramos as dificuldades apresentadas pelos estudantes consubstanciadas ao que Flores (2010, p.279) considera de "cultura visual" que tem a ver com o processo de criação de significados, priorizando-se a experiência do cotidiano, em que se buscam informações, compreensões, significados e conhecimentos. A sala de aulas de Matemática, pode ser um lócus privilegiado para o desenvolvimento dessa cultura visual, um lugar em que os alunos podem colocar suas capacidades individuais de visualização (FLORES, 2010) em tensão com a sua própria produção de intersubjetividade, definindo, desse modo, uma dialética do olhar.

Percebemos da experiência de ensino que os estudantes, quase na sua totalidade, não tinham controle sobre seus próprios processos cognitivos. Na pesquisa de Villota Enríquez, Agudelo Zapata e González Valencia (2018), faz-se referência aos mesmos processos mas que no nosso caso, nos interessa um aspecto: a *Flexibilidade*, que chamaremos de Flexibilidade Cognitiva. Primeiramente, vamos trazer a ideia exposta na pesquisa de Villota Enríquez, Agudelo Zapata e González Valencia (2018, p. 201), sobre esse aspecto: A Flexibilidade é considerada como a capacidade de organizar diferentes formas de elementos clasificados e organizados de um modo determinado, em que se evidenciam as relações existentes entre tarefas de flexibilidade textual (relações intra-intertextuais).

De uma maneira sintética, a flexibilidade cognitiva, se traduz, no nosso trabalho, como a capacidade de transição entre dois textos, um correspondente ao resultado da análise vetorial e o outro representado pelos desenhos feitos pelos estudantes. Da experiência de ensino, percebemos que os estudantes não se dispõem dessa capacidade de estabelecerem as relações intertextuais. Nisso, foi importante o uso do software para ajudar na compreensão dessas relações.

Dissipando a aparente contradição: o contributo do computador

O uso do computador tem vindo a ser incentivado nas escolas para o ensino e aprendizagem da Matemática, nomeadamente no estudo de funções. Já nos anos 80 o NCTM recomendava que as capacidades básicas em Matemática fossem definidas de forma a incluírem mais do que facilidades de cálculo e que fossem tiradas todas as vantagens das capacidades dos computadores e das calculadoras em todos os níveis de ensino. A construção de representações de gráficos de funções e sua análise (estudo completo de funções), torna-se uma tarefa aborrecida quando é realizada com papel e lápis ou no quadro, para além da exigência que tal tarefa suscita, em termos de habilidade visual, rigor e tempo.

O computador incentiva a realização de um grande número de experiências, permitindo a exploração de situações e assuntos não triviais. Os softwares matemáticos (GeoGebra, Winplot, MatLab, Cabri-Géomètre, etc.), quando utilizados de forma educativa[1] (DINIZ, 2018) podem libertar-nos de tarefas mecânicas e rotineiras, de construção, medição e cálculos, deixando espaço para um trabalho dinâmico e ativo na Geometria (PITEIRA; MATOS, 1999).

O uso de computadores na educação permite sua integração no processo de aprendizagem de conceitos curriculares em todas as modalidades e níveis de ensino, atuando como facilitadores entre os aluno e a construção do seu conhecimento (DINIZ, 2018). Existe, portanto, a necessidade dos professores considerarem o potencial do computa-

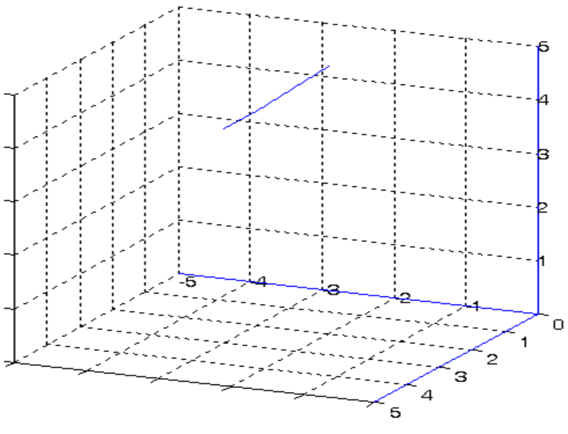
[1] Entenda-se como a capacidade que professores e alunos têm de integrar os recursos tecnológicos nas suas aulas, com o intuito de facilitar o ensino e a aprendizagem.

dor e tentarem adequar as atividades tradicionais de ensino e aprendizagem da Matemática à realidade desse recurso tecnológico.

Na tarefa em abordagem neste texto, com o intuito de dissipar a aparente discrepância entre os resultados obtidos nos gráficos (feitos com papel e lápis) e pela análise vectorial, foi usado o software MatLab. Esse software, assim como outros, também dá a possibilidade de se fazer a rotação de figuras e/ou de eixos permitindo que os mesmos possam ser vistos de diferentes posições e ângulos. Foi possível, com recurso ao MatLab, mostrar aos estudantes resultados muito interessantes mudando a posição do sistema de eixos. Passamos a ilustrar alguns exemplos de figuras geradas pelo computador, na sequência da experiência de ensino que nos referimos neste trabalho.

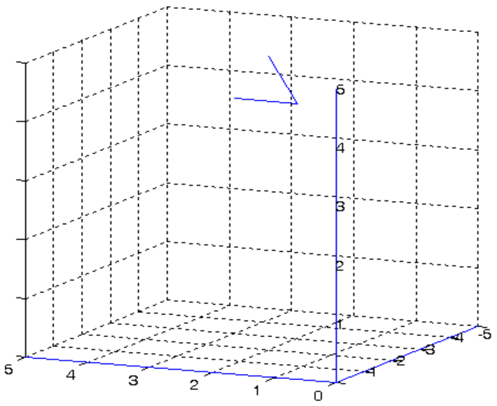
A Figura 4, abaixo, mostra as duas retas no mesmo sistema de coordenadas. Assim, é visível que de onde nos posicionamos e observamos o sistema de coordenadas, a projeção das retas resulta em uma única, ou seja as duas retas coincidem. A Figura 5, mostra as duas retas formando um ângulo diferente de 0º e diferente de 90º. A Figura 6, ilustra que as retas se intersetam sob um ângulo de 90º.

Figura 6. r e s coincidentes.



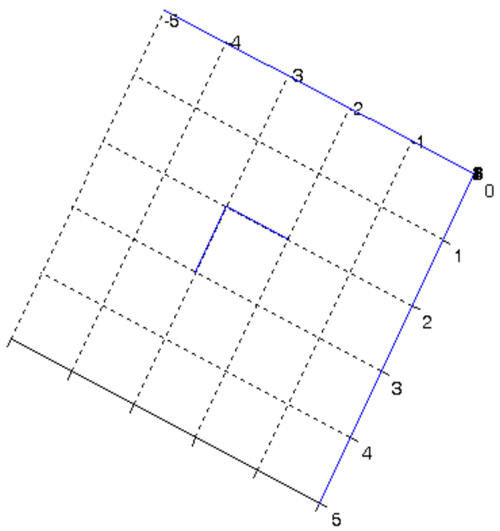
Fonte: o autor (2020).

Figura 7: r e s formando um ângulo diferente de 0º e de 90º.



Fonte: o autor (2020).

Figura 8: r e s formando um ângulo de 90º



Fonte: o autor (2020)

Tudo o que foi ditto sobre as duas retas (r e s) nas três figuras (4, 5 e 6) acima, baseou-se naquilo que se vê. No entanto, algumas análises podem ser feitas em torno dos resultados descritos nos gráficos. Da percepção global do problema arolado sobre a posição relativa das duas retas, da construção e manipulação das imagens através do computador ou não e do processo de exteriorização (comunicação e representação) dos resultados, podemos identificar alguns tipos de processos mentais associados ao pensamento: Intuições, construções de imagens, reconhecimentos visuais, interpretação, geração de conceitos, abstração reflexiva, descoberta de relações entre imagens, propriedades, transformações mentais, verificação, comparação, reconstrução mental da visão de um objeto, generalizações, etc.

Esses processos mentais, combinados uns com outros, podem permitir a extrapolação do âmbito do que se vê para outras dimensões de análise. O pensamento visual-espacial pode ter seus desdobramentos no processo através do qual se cominica e disseminam ideias, apelando para a construção de argumentos válidos e permitindo a exteriorização das representações mentais (BROWN; PRESMEG, 1993).

Da experiência de ensino, ficou evidente que muitos estudantes não conseguem abstrair objetos do espaço, no plano. Em outras palavra, estamos a considerar que muitos alunos não concebem o plano como espaço, o que demonstra que a percepção visual do espaço geométrico, por parte da maioria de alunos, é confusa e equivocada. Na sequência desse tipo de dificuldades, Borba e Villarreal (2005, p.75), defendem que o tratamento experimental dos problemas sobre o espaço em Geometria, pode ser facilitado ao se utilizar tecnologias, pois ele proporciona: (a) a possibilidade de testar uma conjectura usando um número maior de exemplos e de oportunidades de repetir o experimento, devido ao rápido feedback proporcionado pelo computador e (b) a oportunidade de fornecer diferentes tipos de representações de uma dada situação mais facilmente.

Esses dois aspetos foram importantes para dissipar-se a aparente contradição que os estudantes vislumbraram nos seus resultados. Com o software, foram apresentadas diversas imagens como as das figuras 4, 5 e 6, que permitiram que se percebesse que as duas retas formavam um ângulo de 90º entre si. Portanto, uma abordagem visual proporcionada pelo computador viabilizou a aquisição de certeza e confiança em fatos matemáticos que, muitas vezes, só podem ser "vistos" pela mente (BORBA; VILLAREAL, 2005).

Conclusão

A experiência de ensino relatada neste trabalho, mostra o quanto os estudantes ficam reféns dos seus desenhos quando discutem conteúdos da Geometria (especial). Na realização da tarefa a eles proposta, não foram capazes de transitar do texto representado pelos desenhos que fizeram nos seus cadernos para o texto que emergiu da análise vetorial sobre a posição relativa das retas r e s no espaço (e vice-versa). Além disso, ficou evidente a dificuldade dos estudantes de representar e visualizar o espaço no plano. Nesse tipo de situações, tal como aconteceu na experiência de ensino, a manipulação de materiais concretos e o uso de softwares matemáticos, torna-se importante, pois auxilia na compreensão dos conteúdos geométricos.

Este trabalho, revela-se umportante para a área de educação matemática, pois alarga o debate sobre o processo de ensino e aprendizagem da Geometria, sobre o contibuto do computador na abordagem dessa disciplina.

Referências Bibliográficas

Borba, M. C. e Villareal, M.E. *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation*. USA: Springer, pp.78-100, 2005.

Brown, D., & Presmeg, N. (1993). Types of imagery used by elementary and secondary school students in a mathematical reasoning. In *Proceedings of 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 137-144). Tsukuba, Japão.

Diniz, P. (2020). As Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no Ensino da Matemática em Moçambique: da aquisição à utilização dos recursos tecnológicos. En: Villota Enríquez, J. A. y González Valencia, H. *Tecnología, Sociedad y Educación: perspectivas interdisciplinares en torno a las TIC desde el campo social y educativo* (pp. 167-185). Cali, Colombia: Editorial Universidad Santiago de Cali.

Flores, C. R. (2010). Cultura visual, visualidade, visualização matemática:balanço provisório, propostas cautelares. ZETETIKÉ – FE – Unicamp – v. 18, Número Temático 2010

Flores, C. R.; Wagner, D. R & Buratto, I. C. F. (2012). Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas. *Educ. Matem.* Pesq., São Paulo, v.14, n.1, pp.31-45, 2012

Konyalioglu, S (2003). *The Role of Visualization Approach on Student's Conceptual Learning*. (http. www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/konyalioglu.pdf) – 21-05-2007

Piteira, G. & Matos, J. (1999). *Ambientes dinâmicos de geometria como artefactos mediadores para a aprendizagem da geometria*. Acedido em http://meduc.fc.ul.pt/.

Senechal, M. (1991). Visualization and visual thinking. In J. Malkevitch (Org.), *Geometry`s future* (pp. 15-21). USA: COMAP.

Support to Teacher Training Programme - STTP (2005). *Linhas Gerais do Projecto UP-STTP*. Maputo, Moçambique: Universidade Pedagógica.

Venturi, J. J. (1949). *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica*. Curitiba, Brasil: Jacir J. Venturi. 9ª Edição.

Villota Enríquez, J.A.; Agudelo Zapata, A. M. y González Valencia, H. (2018). Estrategias que utilizan los estudiantes para desarrollar el pensamiento tecnológico: una mirada desde los artefactos tecnológicos. En: Villota Enríquez, J. A.; Díaz Villa, M. y Gómez Vásquez, M. V. *Tecnología, Sociedad y Educación: desafíos de las TIC en el desarrollo social y sus implicaciones en la práctica educativa*. (pp. 185-210). Cali, Colombia: Editorial Universidad Santiago de Cali.