Matemática

Aprenda, repase

Jesús Elías Aguilar Ibagué

VIGILADA MINEDUCACIÓN

USC
UNIVERSIDAD SANTIAGO DE CALI
EDITORIAL

Matemática

Aprenda, repase

Jesús Elías Aguilar Ibagué

VIGILADA MINEDUCACIÓN
USC
UNIVERSIDAD SANTIAGO DE CALI
EDITORIAL

Aguilar Ibagué, Jesús Elías
Matemática. Aprenda, repase / Jesús Elías Aguilar Ibagué. --
Cali : Universidad Santiago de Cali, 2017.
144 páginas : gráficas tablas ; 17 x 24 cm.
Incluye índice temático
1. Matemáticas - Enseñanza - Metodología 2. Cognición en niños 3. Razonamiento 4. Aprendizaje 5. Pruebas de estado - Resultados I. Tít.
510.7 cd 21 ed.
A1578342

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

Matemática. Aprenda, repase

1a. Edición 200 ejemplares
Cali, Colombia - 2017
ISBN: 978-958-8920-43-6

Diagramación e impresión
Artes Gráficas del Valle S.A.S.
Tel. 333 2742

Distribución y Comercialización
Universidad Santiago de Cali
Unidad de Publicaciones
Calle 5 Nº 62-00
Ext: 414

Coordinación Editorial
Edward Javier Ordóñez

Sugerencias y Comentarios al autor:
preicfes@usc.edu.co; proyectos@usc.edu.co;
jaguilib@usc.edu.co

Contenido

AGRADECIMIENTO

A mis hijos: Juan Carlos, Victoria Eugenia y Carlos Andrés, como homenaje a su responsabilidad y ética en el diario vivir.
A Alfonso Bustamante Arias, matemático puro, por su aporte en la lectura y revisión del texto.

PRÓLOGO

La Universidad Santiago de Cali, USC, como Institución de Educación Superior, que cuenta con trayectoria en la Región del Valle del Cauca y con prestigio por su componente en Responsabilidad Social, es conocedora de la importancia de participar en procesos que permitan desarrollar prácticas de asesoría y apoyo al Estado. Además, la USC tiene en cuenta que para efectos de ingreso a la Educación Superior, que exige presentar las Pruebas de Estado a los estudiantes que están finalizando grado undécimo (11°) o a quienes hayan obtenido el título de bachiller o hayan superado el examen de validación de bachillerato, tiene como objetivo apoyar a los colegios en el proceso educativo y facilitar a los estudiantes técnicas que permitan mejorar su nivel cognitivo, para obtener mejores resultados en las pruebas del Estado Saber 11° que faciliten el ingreso a la formación profesional.

Los resultados de los exámenes se usan como criterio de admisión de estudiantes a la Educación Superior, según el programa académico al que desea ingresar, en los diferentes niveles de formación como carreras técnicas profesionales, tecnológicas y universitarias. El pre-ICFES, es un Curso diseñado para ayudar a los estudiantes en el mejoramiento de sus competencias que evalúa el Examen de Estado Saber 11°, en la toma de conciencia acerca de las ventajas competitivas cuando se obtienen excelentes resultados y en la acertada elección de carrera profesional. Así, el objetivo fundamental de este texto es guiar eficientemente a los estudiantes en el desarrollo de la matemática del bachillerato, con talleres, lecturas, simulacros y explicaciones complementarias, en procura de mejorar su capacidad interpretativa y de análisis de las diferentes pruebas, para obtener resultados positivos en el examen de Estado. Es de anotar que la publicación del texto *Matemática. Aprenda, repase* es producto de muchos años de experiencia del Licenciado JESÚS ELÍAS AGUILAR

IBAGUÉ, en su largo proceso como docente y, a la vez, es respuesta al compromiso de la USC, en la producción de materiales didácticos cuyo contenido teórico y práctico sea un material de apoyo para desarrollar conocimientos y competencias para lograr un óptimo desempeño en el área de matemática.

El autor es *Especialista en Computación para la Docencia*, de la Universidad Antonio Nariño; *Licenciado en Comercio y Contaduría*, de la Universidad Mariana de Pasto; *Contador Público* Titulado, egresado de la Universidad Santiago de Cali. Así mismo es candidato a Especialista en Estadística Aplicada, de la Universidad Los Libertadores y Maestría en Mercadeo, de la Universidad Libre Seccional Cali. En la actualidad es docente de la Universidad Santiago de Cali, adscrito a la Facultad de Ciencias Básicas y Pre-ICFES. Ha desempeñado su labor docente en: Colegio General Santander de Sevilla, Valle. En la ciudad de Cali en el Centro de Estudios Superiores, en el colegio Hernando Navia Varón, en la Universidad del Valle y en la Universidad de San Buenaventura.

El autor, con esta publicación, ofrece a estudiantes y profesores una obra de gran utilidad académica en el desarrollo de la práctica profesional.

CARLOS ANDRÉS AGUILAR CARO
Ingeniero de Desarrollo.
Universidad Autónoma de Occidente

PRESENTACIÓN

La labor docente desempeñada como profesor y realizada en los diferentes niveles educativos, imprime al autor la necesidad de presentar sus experiencias como docente en un texto de fácil asimilación en el que se pueden mejorar las debilidades y afianzar las fortalezas de los estudiantes, buscando en ellos un dominio idóneo de su contenido.

Este texto ha sido elaborado con el propósito de aprender o repasar los diferentes temas de matemática vistos en el bachillerato y a su vez como aporte al repaso del temario matemático empleado en el Examen de Estado Saber 11°. Se le dio una presentación que permite proporcionar al estudiante una estructura secuencial de los diferentes temas que se abordan. Busca entregar herramientas de trabajo que prioricen el razonamiento en el aprendizaje de la matemática para resolver con facilidad los diferentes temas que se presentan con claridad en un orden de dificultad secuencial y con ilustraciones pertinentes.

La primera unidad recrea las definiciones del sistema numérico, sus elementos, operaciones y ejercicios de aplicación. En la segunda unidad se presenta el estudio de las expresiones algebraicas, operaciones, productos notables, factorización, solución de ecuaciones, solución de inecuaciones, funciones. En la unidad tres, aparecen los conceptos y definiciones de elementos de geometría, Teorema de Pitágoras, semejanza. La unidad cuatro corresponde al sistema métrico decimal, donde se presentan temas de medidas de longitud, medidas de volumen, medidas de superficie, medidas de capacidad, medias de peso, áreas, volumen y funciones trigonométricas. Finalmente, la unidad cinco de Estadística, en la que se dan definiciones y conceptos de la terminología fundamental en Estadística; se presentan tabulaciones y gráficos de Estadística descriptiva, las medidas de centralización, percentiles, varianza; Teoría de contar e introducción a probabilidades.

Así mismo, al final de cada unidad se adjunta una serie de ejercicios relacionados con los temas tratados en la obra, con el propósito de profundizar sus conocimientos. Igualmente se anexa una evaluación por cada unidad tratada en el texto.

LOGROS GENERALES

1. Adquiere habilidades en la solución de situaciones reales mediante el razonamiento lógico.
2. Adquiere conocimientos con la razón y la reflexión más que con la memoria o la mecanización.
3. Construye e interpreta gráficos para entender situaciones de la vida real.
4. Calcula operaciones complejas, siendo solidario con sus compañeros.
5. Explica e interpreta los resultados mediante procedimientos matemáticos.
6. Interpreta tablas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos de uso común.
7. Analiza las relaciones entre dos o más variables para determinar o estimar su comportamiento
8. Desarrolla habilidades intelectuales (interpretar, definir, argumentar, describir, caracterizar, valorar, entre otras) para proyectarse en la Educación Superior.

CAPÍTULO 1

LOGROS

- Al concluir el estudio de este capítulo, el estudiante:
- Identifica un número natural y efectúa operaciones.
- Identifica un número entero y efectúa operaciones.
- Identifica un número racional y efectúa operaciones.
- Identifica un número racional decimal y efectúa operaciones.
- Diferencia un número racional de un irracional.
- Realiza operaciones con números reales.
- Diferencia entre máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
- Pasa un número decimal a fraccionario.
- Diferencia entre razón y proporción.
- Resuelve problemas de regla de tres simple directa y regla de tres inversa.
- Identifica las propiedades de la potenciación.

1. CONJUNTOS NUMÉRICOS

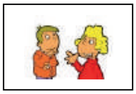
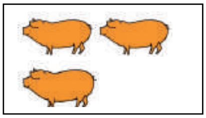
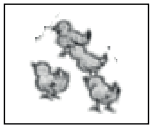
Se llama así al conjunto de los diferentes conjuntos de números. Hace referencia a los conjuntos de números naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, lo mismo que a los números imaginarios y complejos.

1.1 Número Naturales ($\mathbb{N}$)

Los números naturales aparecen por la necesidad del hombre de contar. Son los que primero aparecen, puesto que contar y ordenar elementos son tareas elementales en el manejo de cantidades.

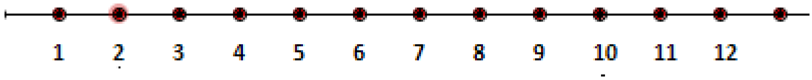
Con los números naturales podemos contar la cantidad de elementos de un conjunto. Para representar los números naturales de usa el símbolo $\mathbb{N}$.

Ejemplo. Contar los elementos de los siguientes conjuntos:

¿Cuántos peces?	¿Cuántos niños?	¿Cuántos cerdos?	¿Cuántos pollitos?
1	2	3	4
			

El conjunto de los números naturales está formado por:

$\aleph$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ……….}.



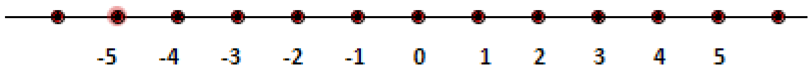
1.2 Enteros (Z):

Los números enteros aparecen para poder resolver restas, donde el sustraendo sea mayor que el minuendo, pues dicha resta no tiene solución en el conjunto de los números naturales y por tanto a cada número natural le corresponde su simétrico, o sea, aquel que está situado a igual distancia con respecto a cero.

Los enteros entonces están formados por los números naturales (enteros positivos) con sus opuestos o simétricos (negativos) y el cero.

$Z = z^{-} \cup z^{+} \cup \{ 0 \}$

$Z = \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.



1.3 Número Racional (Q) e Irracional (I)

1° Un número racional (Q) es un entero, un decimal finito como 3,5 o un decimal infinito periódico como 2,3333……., donde los puntos suspensivos indican que el 3 se repite indefinidamente.

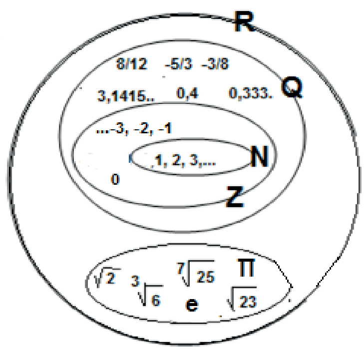
Es un conjunto formado por todos los números que se pueden escribir de la forma (**a/b**) donde **a** y **b** son enteros y **b** es diferente de cero.

Q = { -8, …-3/2, …-1, 0, ½, …….3, ….12,………}.

2° Un número irracional **(I)** es todo decimal infinito no periódico como 3,21211211121111… etc. o que al ponerse en forma decimal es infinito no periódico como $\sqrt{2}$, π, etc.

1.4 Números reales (R)

Definición. Un número real, es cualquier número racional o irracional. Estos se pueden expresar en forma decimal o mediante un número entero o un decimal exacto o un decimal periódico o un decimal con infinitas cifras no periódicas.



Q: Números Racionales (Fracciones, decimales finitas o periódicas.
Z: Números Enteros (Positivos negativos y cero)
N: Números Naturales (Enteros positivos)
I: Números Irracionales.decimales infinitos no periódicos como pi, $\sqrt{2}$
$R = \left\{\ldots -\frac{3}{3}, -2, -\sqrt{26}, 0, 6, \ldots\right\}$
$Q = \left\{\ldots -\frac{3}{6}, \frac{1}{8}, -4, 0, 1, \frac{2}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4, \ldots\right\}$
$Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

1.5 Números imaginarios

Los números imaginarios aparecen por la necesidad de resolver raíces de índice par y radicando negativo. Se simboliza con **i.** Son los que se pueden escribir como el producto de un número real por la unidad imaginaria (**i**), es decir, un número imaginario es de la forma **bi**, donde: **b**, es un número real

i, es la unidad imaginaria, donde **i** = $\sqrt{-1}$

Con los números imaginarios se puede calcular raíces con índice par y radicando negativo.

Ejemplo. $X^2 + 4 = 0$
$X^2 = -4$
$X = \pm\sqrt{-4}$; donde: $X = +2i$ y $X = -2i$

Algunas potencias de **i**

- Unidad: $i = \sqrt{-1}$
- $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$
- $i^3 = i^2 * i = (\sqrt{-1})^2 * i = -\sqrt{-1}$
- $i^4 = i^2 * i^2 = (\sqrt{-1})^2 * (\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{+1})^4 = +1$
- $i^5 = i^4 * i = (\sqrt{-1})^4 * (\sqrt{-1}) = +1(\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}$

1.6 Números complejos

Son los que tienen una parte Real y otra Imaginaria: a + bi; donde a y b pertenecen a los números reales, e, i = $\sqrt{-1}$

Ejemplo: a) $3 + 5i$ b) $-4 + (\frac{3}{2})i$ c) $(\frac{1}{2}) -2i$
Suma: (a + bi) +(c + di) = (a + c) + (b + d)i
Suma: (3+4i) + (-2-6i) = 1 -2i

Resta de números complejos

Ej. De (7+3i) restar (-8+9i), se identifica el minuendo, el sustraendo y escribe:	= (7+3i) - (-8+9i)
Se destruye el paréntesis aplicando ley de los signos	= 7 + 3i +8 – 9i
Se reducen términos semejantes	= 15 - 61

Ej. Restar -5 + 4i de -12 – 10i, se identifica el minuendo y el sustraendo y escribe:	**= -12 -10i – (-5 + 4i)**
Se destruye el paréntesis aplicando ley de los signos	**= -12 – 10i + 5 -4i**
Se reducen términos semejantes	= -7 – 14i

Multiplicación: (a + bi) (c + di), se resuelve en forma usual haciendo $i^2 = -1$

Multiplicar: $(2-5i)(-6+8i)= -12+16i+30i-40i^2$

$=-12 +46i -40(-1)$

$=-12+46i+40= +28+46i$

Ejercicio. Sumar: a) (-12+7i) + (8-5i)+(7i+9)

b) Restar (-5i + 9) de (3i -79

Multiplicar: a) (9-6i)(-13-8i)=

Multiplicar: b) (-2i+8)(12 +5i)

1.7 Convertir un número en base dos a otro de base decimal

Ejemplo. Convertir el número binario (base 2), $1101010_{(2)}$ a número decimal. Se multiplica cada **bit** por 2, elevado este producto a un exponente igual al número de bits a su derecha

6 5 4 3 2 1 0 Posición de cada número binario (exponente)

$1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0_{(2)} = (1x2)^6 + (1x2)^5 + (0x2)^4 + (1x2)^3 + (0x2)^2 + (1x2)^1 + (0x2)^0 =$

$= 64 + 32 + 0 + 8 + 0 + 2 + 0 =$

$1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0_{(2)} = 106_{(10)}$

Ejercicios: Convertir a decimal: a) $11010_{(2)}$ b) $100101_{(2)}$ c) $1010100_{(2)}$

1.8 Pasar un número de base decimal a binario

Ejemplo. Convertir 46 a base dos.

a. Se divide 45 entre 2 y con el cociente obtenido se repite el procedimiento de dividir entre 2, hasta que el cociente sea 1.

b. El número binario se forma tomando el número del último cociente seguido por los residuos obtenidos en cada división, de derecha a izquierda.

```
46  |2
0    23 |2
     1   11 |2
         1   5 |2
             1  2 |2
                0  1
```

$\leftarrow$ **1** $0\,1\,1\,1\,0_{(2)} = 46$

Ejercicios: Convertir a número binario:

a) 56 b) 34 c) 45

1.9 Divisor – Números primos

Divisor

Un número **m** es divisor de otro número **n**, cuando hay un entero **p** tal que **n = mp**
Entonces, cuando **m** es divisor de **n**, la división de **n** entre **m** es exacta.

Ejemplo. Divisores exactos de 12, son: $D_{12} = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
Ejemplo. Divisores exactos de 4, son: $D_4 = \{ 1, 2, 4\}$.
Ejemplo. Divisores exactos de 5, son: $D_5 = \{ 1, 5\}$.
Ejercicio: Halle los divisores exactos de 8, 15, 29, 10

Número primo

Es un número diferente de 1, que solo se puede dividir por sí mismo y por la unidad. P= {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,……}.

1.10 Múltiplo

Un número es múltiplo de otro cuando se deja dividir para él, o, cuando lo contiene un número exacto de veces.

Los múltiplos de un número se obtienen multiplicándolo por los números naturales.

Ej. Los múltiplos de 3 son:

3x1=3 Luego los múltiplos de 3 son: M_3 = { 3, 6, 9, 12, 15, ……..}.
3x2=6
3x3=9
3x4=12

1.11 Descomposición de un número en producto de factores primos

Los números enteros compuestos (nombre que se da a los que no son primos), se pueden descomponer o expresar como productos de potencias de números primos.

Para descomponer un número en producto de factores primos, se procede así:

1° Se escribe el número que se va a descomponer a la izquierda de una raya vertical y a la derecha el menor número primo por el cual el número sea divisible. Se divide el número a descomponer entre el número primo empleado y el cociente se coloca debajo del número propuesto.

2° Sucesivamente se procede como en el paso anterior hasta llegar a un cociente igual a uno.

Ejemplo: Descomponer en factores primos el número 30

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

El número es igual al producto de los factores primos obtenidos 30 = 2*3*5

1.12 Máximo común divisor (M.C.D.)

Es el mayor de los divisores comunes de los números.

Ejemplo: hallar el M.C.D. (18 y 24).
D_{18} = {1, 2, 3, 6, 9, 18}.
D_{24} = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}.
$D_{18} \cap D_{24}$ = {1, 2, 3, 6}.
Máx $(D_{18} \cap D_{24})$ = 6.

Para hallar el Máximo Común Divisor de varios números, se descomponen dichos números en sus factores primos y luego se toman los factores comunes con su menor exponente.

$18 = 2 \times 3^2$
$24 = 2^3 \times 3$ Luego el MCD (18, 24) $= 2 \times 3 = 6$

1.13 Mínimo Común Múltiplo (M.C.M.)

Es el menor de los múltiplos comunes de los números.

Ejemplo: hallar el M.C.M. de (20 y 28).
$M_{20} = \{20, 40, 60, 80, 100, \ldots\ldots\}$.
$M_{40} = \{40, 80, 120, 160, \ldots\ldots\}$.
$M_{40} \cap D_{40} = \{40, 80\}$.
$\text{Mín}\,(D_{40} \cap D_{40}) = 40$.

Para hallar el Mínimo Común Múltiplo de varios números, se descomponen dichos números en sus factores primos y luego se toman los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

$20 = 2^2 \times 5$
$24 = 2^3 \times 3$ Luego el MCM (20, 24) $=2^3 \times 5 = 40$

Propiedad del MCD y MCM
MCD (a,b) x MCM (a,b) = (a)(b)
Ejemplo: MCD (18, 24) x MCM (18, 24) = (18)(24) = 432

1.14.Fraccionarios – Operaciones

Suma y resta

$$\frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{1}{10} =$$

1° Se halla el Común Denominador (M.C.M.) de los denominadores,
2° Se divide el denominador hallado entre cada uno de los denominadores y su resultado se multiplica por su correspondiente numerador,

3° Se suma algebraicamente los numeradores y se coloca el mismo denominador, así:

$$\frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{1}{10} = \frac{15 - 16 + 10}{20} = \frac{9}{20}$$

Ejemplo. $\frac{3}{8} + \frac{4}{12} - \frac{5}{18} = \frac{27 + 24 - 20}{72} = \frac{31}{72}$

Multiplicación. Para multiplicar fracciones, se multiplica numerador con numerador y denominador con denominador.

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a.c}{b.d}$$

Ejemplo: Multiplicar: $\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{(3)(5)}{(8)(6)} = \frac{15}{48} = \frac{5}{16}$

Ejercicio. Multiplicar: a) $\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{5}{6}\right)$ b) $\left(\frac{-8}{7}\right)\left(\frac{2}{9}\right) =$

División. Para dividir fracciones, se multiplica en cruz, o, se multiplica la primera fracción por la segunda fracción invertida.

$$\left(\frac{a}{b}\right) \div \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{(a)(d)}{(b)(c)}$$

Ejemplo. Dividir: $\left(\frac{6}{4}\right) \div \left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{(6)(5)}{(4)(3)} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}\right.$

Ejercicio: Dividir: a) $\left(\frac{3}{5}\right) \div 9 =$ b) $\left(\frac{12}{-5}\right) \div \left(\frac{7}{3}\right) =$

1.15 Números Decimales

Los decimales son formas equivalentes de las fracciones. Se obtienen dividiendo el numerador de la fracción con el denominador.

Ejemplo. Expresar la fracción $\frac{3}{5}$ en número decimal. $\frac{3}{5}$ **= 0,6**

Lectura de un número decimal

Un número decimal está formado por una parte entera (a la izquierda de la coma) y una parte decimal (a la derecha de la coma) .

Ejemplo. Indicar la posición de las cifras en 1948, 34:

DIGITOS A LA IZQUIERDA DE LA COMA	DIGITOS A LA DERECHA DE LA COMA
8 UNIDADES	3 Décimo $\left(\frac{3}{10}\right)$
4 DECENAS	4 Centésimos $\left(\frac{4}{100}\right)$
9 CENTENAS	2 milésimos $\left(\frac{2}{1000}\right)$
1 UNIDADES DE MIL	

Operaciones con números decimales

Suma – Resta. Para sumar o restar números decimales, lo importante es la colocación de las comas (colocar coma debajo de coma)

Ejemplo. Sumar: 12,3 + 8,67 + 236,126

12,3	Es como si fuera:	12,300
8,67		8,670
236,126		23 6,126
257,09 6		257,096

Ejemplo. Restar: 128,459 de 214,32

214,320
128,459
085,861

Multiplicación. Se hace la multiplicación como si fueran números enteros y en el resultado, se cuentan las cifras decimales de ellos y se ubica la coma separando de derecha a izquierda el número de cifras contadas anteriormente en el producto final o resultado.

Ejemplo. Multiplicar: (12,6) (235,43) = 2966,418

División. Se igualan las cifras decimales del dividendo y del divisor luego se eliminan las comas y se divide común y corriente.

Ejemplo. Dividir 23,1 entre 0,345. Es decir, $\frac{23,1}{0,345} = \frac{23100}{345} = 66,9$

1.16 Pasar una fracción a un número decimal

Para realizar esta operación basta con dividir el numerador entre el denominador.

Ejemplo. Convertir a número decimal:

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{14}{60}$

a) $\frac{4}{5} = 0{,}8$ Decimal exacta

b) $\frac{2}{53} = 0{,}\overline{6}66666$....Decimal periódico. La cifra que se repite se llama **periodo**

c) $\frac{14}{60} = 0{,}2\overline{3}3333$....Decimal periódico mixto. En este caso entre la coma y el período se encuentra una o más cifras.

1.17 Pasar un número decimal a fraccionario

NÚMERO DECIMAL	EJEMPLOS
Decimal exacto. Se escribe el número sin coma dividido entre la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número dado.	$0{,}6 = \frac{6}{10}$ $2{,}25 = \frac{225}{100}$ $0{,}3687 = \frac{3687}{10000}$ $0{,}004 = \frac{4}{1000}$
Decimal periódico. Se escribe el número sin coma y se le resta la parte entera sin período, dicha resta se divide por un número formado por tantos nueves como cifras tenga el período,	$2{,}\overline{98} = (298 - 2) \div 99 = \frac{296}{99}$ $0{,}\overline{2} = (2- 0) \div 9 = \frac{2}{9}$ $0{,}\overline{06} = (6 - 0) \div 99 = \frac{6}{99}$ $35{,}\overline{3} = (353 - 35) \div 9 = \frac{318}{9}$ $0{,}\overline{128} = (128 - 0) \div 999 = \frac{128}{999}$

Decimal periódico mixto. Se escribe el número sin coma y se le resta el número formado con las cifras antes del período. La diferencia se divide entre tantos nueves como cifras tenga el período y tantos ceros como cifras haya entre la cifra entera y el período.	$1{,}0\overline{38} = (1038 - 10) \div 990 = \frac{1028}{990}$ $2{,}31\overline{6} = (2316 - 231) \div 900 = \frac{2085}{900}$ $0{,}14\overline{26} = (1426 - 14) \div 9900 = \frac{11412}{9900}$ $42{,}63\overline{5} = (42635 - 4263) \div 900 = \frac{38372}{900}$

Los decimales infinitos puros pertenecen a los números Irracionales, como: π, $\sqrt{2}$, etc.

1.18 Porcentaje

El porcentaje o tanto por ciento, que se simboliza con %, es un símbolo matemático que se usa para comparar una fracción con otra, expresándolas en porcentajes.

En el cálculo de porcentaje se puede presentar tres casos:

1° Cuando se tiene la cantidad total, se debe hallar el número equivalente al a un porcentaje de ella.

Ejemplo. El tío de Juan Camilo, le obsequia el 30% del costo de una camisa que es $40.000. ¿Cuánto es el obsequio?

Valor de obsequio = 30%($ 40.000) = $\frac{30}{100}$ ($40.000) = $ 12.000

$ 12.000 es el 30% de $ 40.000

2° Cuando se tiene una cantidad total, una parte de ella y se desea saber a que porcentaje del total equivale esta parte.

Ejemplo. Un pantalón de Juan Camilo vale $60.000, su tío le obsequia $24.000. ¿A qué porcentaje del valor total corresponde el obsequio del tío?

Obsequio en porcentaje = $\frac{\$24.000}{\$60.000}$ = 0,40 equivale a: (0,40)(100%) = 40%

$24.000 es el 40% de $ 60.000

3° Cuando se tiene una cantidad parcial, el porcentaje equivalente a ella y se desea conocer la cifra total.

Ejemplo. El tío de Juan Camilo le obsequió $42.000 del valor total de un par de zapatos si estos equivalen a 60%; ¿Cuál es valor de los zapatos?

Sea, X el valor total de los zapatos, entonces:
(X)(60%) = $42.000 se despeja X,

X = $\frac{\$42.000}{60\%}$ = $\frac{\$ 42.000}{0,60}$ = $ 70.000 El valor de los zapatos es $70.000

1.19 Razones – Proporciones

Razón. Una razón es una comparación entre dos cantidades semejantes. Se puede escribir de varias formas. Si las cantidades son **m** y **n**, entonces la razón se escribe: **m**:**n**, o, **m** a **n**, o, **m/n** y se lee "**m** es a **n**".

Ejemplo. En un curso hay 18 mujeres y 6 hombres, la razón de mujeres a hombres se expresa: 18 : 6, o, 18 a 6 , o, $\frac{18}{6}$.

Es decir: 18 a 6
$\frac{18}{6} = \frac{3}{1}$; significa que hay 3 mujeres por cada hombre.

Proporción. Una proporción es una igualdad de dos razones. **a/b = c/d** y se lee "**a** es a **b** como **c** es a d"

Los términos **a** y **d**, se denominan extremos y los términos **b** y **c** se denominan medios.

Propiedad fundamental de la proporción. El producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Luego (a)(d) = (b)/c)

Ejemplo. $\frac{6}{9} = \frac{8}{12}$ Entonces: $(6)(12) = (9)(8)$

$72 = 72$

- Calcular el valor de X, en: a) $\frac{X}{8} = \frac{5}{10}$ b) $\frac{14}{X} = \frac{9}{5}$ c) $\frac{8}{15} = \frac{X}{10}$

1.20 Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son directamente proporcionales, si a medida que una de ellas varía en un factor K, la otra varía en el mismo factor.

Si una se duplica, la otra se duplica. Si una se reduce a una tercera parte, la otra se reduce a la tercera parte.

Ejemplo. Un caso de magnitudes directamente proporcionales ocurre cuando analizamos el costo de una camisa, el cual aumenta en la medida que aumenta el número de camisas.

1.21 Regla de tres simple directa

Permite resolver problemas de proporcionalidad directa.

Ejemplo. Un automóvil recorre 240km en 3 horas. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido en 2 horas, si conserva la velocidad?

Observe que el tiempo pasó de 3 horas a 2 horas, disminuyó; luego los kilómetros recorridos también deben de disminuir, entonces las magnitudes son directas.

240 km……….3h $\frac{240}{X} = \frac{3}{2}$, se despeja "X

X **2** $X = \frac{(240)(2)}{3} = \frac{480}{3} = 60$ km

1.22 Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes son inversamente proporcionales, si a medida que una de ellas se duplica la otra se reduce a la mitad; si una se reduce a la tercera parte la otra se triplica.

Ejemplo. Al aumentar el costo de un producto disminuye la utilidad, pero si aumenta la utilidad entonces disminuye el costo.

1.23 Regla de tres simple inversa.

Permite resolver problemas de proporcionalidad inversa.

Ejemplo. En una caballeriza se tiene alimento para dar de comer a 180 caballos durante 40 días. Para cuántos días podrá alimentar 250 caballos con la misma cantidad de comida?

Al analizar las magnitudes se observa que el número de caballos aumenta y el número de días disminuirá, luego es **inversa.**

180 cab / 250 ……   40 días / X

La proporción se construye invirtiendo la razón de la "X", así:

- $\frac{180}{250} = \frac{X}{40}$ Se despeja la "X" , entonces:

$$(180)((40) = (250)(X)$$

$$X = \frac{(180)(40)}{250} = 28{,}8 \text{ días}$$

1.24 Regla de tres compuesta

En este caso se compara cada pareja de datos con la pareja que contiene la incógnita para identificar si es directa o inversa. Como ayuda, para recordar, pude colocar un signo menos (-) encima de la pareja inversa y un signo positivo (+) en cima de la pareja que resulte directa.

Ejemplo. Dos (2) obreros trabajando 3 horas diarias hacen un trabajo en dos (2) días. ¿En cuánto tiempo harán la misma obra tres (3) obreros trabajando dos (2) horas diarias?

-	-	
2 obre	3 h/d	2 días
3	2	X

$\frac{2}{X} = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$ Luego $\frac{2}{X} = \frac{6}{6}$; se despeja X: $X = \frac{2*6}{6} = \frac{12}{6} = 2$ días

Ejemplo. **Si 8 obreros realizan en 9 días trabajando 6 horas diarias un muro de** 30 metros. ¿Cuántos días necesitarán 12 obreros trabajando 10 horas diarias para terminar los 50 metros del muro que faltan?

-		-	+
8 obreros	9 días	6 horas	30 metros
12	X	10	50

$\frac{9}{X} = \left(\frac{12}{8}\right)\left(\frac{10}{6}\right)\left(\frac{30}{50}\right)$ Luego, $\frac{9}{X} = \frac{3600}{2400}$

$$(3600)(X) = (9)(2400)$$

$$X = \frac{21600}{3600}$$

$$X = 6 \text{ días}$$

1.25 Potenciación

Exponente

Coeficiente $6X^5$ Base

PROPIEDAD	EJEMPLO
Producto de potencias de igual base, se coloca la misma base y se suman los exponentes.	$X^3 . X^5 . X .X^4 = X^{3+5+1+4} = X^{13}$ $4^3 . 4^6 . 4^5 = 4^{3+6+5} = 4^{14}$
Producto de potencias de igual exponente, se multiplican las bases y se coloca el mismo exponente.	$X^5 . Y^5 = (X.Y)^5$ $3^4 . 5^4 . 2^4 = (30)^4$
Cociente de potencias de igual base, se coloca la misma base y se restan los exponentes.	$X^{11} \div X^7 = X^{11-7} = X^4$ $5^9 \div 5^3 = 5^{9-3} = 5^6$
Cociente de potencias de igual exponente, se dividen las bases) y se coloca el mismo exponente.	$X^8 \div Y^8 = (X/Y)^8$ $18^6 \div 2^6 = (18/2)^6 = 9^6$ $12^4 \div 5^4 = (12/5)^4$

Potencia de una potencia, se coloca a misma base y se multiplican los exponentes.	$(X^m)^n = X^{m.n}$ $(3^5)^4 =$ $3^{(5)(4)} = 3^{20}$
OTRAS POTENCIAS - EJEMPLOS	
$(X^a \,.\, Y^b)^m = X^{a.m} \,.\, Y^{b.m}$	$(4^2 \,.\, 5^3)^4 = 4^8 \,.5^{12}$
$(X^a \div Y^b)^m = X^{am} \div Y^{bm}$	$(5^3 \div 6^2)^6 = (5^3)^6.\,(6^2)^6 = 5^{18}.\,6^{12}$
$X^{-n} = 1 \div X^n$	$6^{-1} = 1/6$
$X^0 = 1$; Si, $X \neq 0$	$7^0 = 1$
Producto de radicales de diferente índice, Se resuelve cada uno por separado.	$\sqrt[5]{X} * \sqrt[3]{Y} = \sqrt[5]{X} * \sqrt[3]{Y}$ $\sqrt[5]{3} * \sqrt[3]{4} = \sqrt[5]{3} * \sqrt[3]{4}$
Producto de radicales de igual índice, con raíces definidas en los reales. Se multiplica la cantidad subradical y se coloca el mismo índice.	$\sqrt[3]{4} * \sqrt[3]{5} * \sqrt[3]{2} * \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{120}$
Pasar potencia a raíz, definida en los reales.	$Y^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{Y^m}$ $y^{5/3} = \sqrt[3]{y^5}$
Pasar raíz, definida en los reales, a potencia.	$\sqrt[n]{X^m} = X^{m/n}$ $\sqrt[3]{x^5} = x^{5/3}$

Ejercicios de Aplicación del Capítulo

1. Una alarma se enciende cada 15 segundos, otra cada 12 segundos y una tercera cada 45 segundos. A las 7:00 pm todas coinciden. Las veces que vuelven a coincidir en los 7 segundos siguientes es:

A) 1 vez B) 4 veces C) 3 veces D) 2 veces

2. La edad de cuatro personas es 12, 18, 20 y 36, la menor edad que contiene las edades mencionadas es:

A) 150 B)180 C) 60 D) 160

3. Una persona nació en el año 5 a C., y se casó en el año 25 d. C. La edad a la que se casó es

A) 20 B) 25 C) 15 D)30

4. Un automovilista ha recorrido 155,6 km, en una etapa; 146,63 km, en una segunda, y 172,68 km, en una tercera. Si el total de la carrera son 500 km, lo que le falta por recorrer es:

A) 24,8 Km B) 26 C) 26,09 D) 25,09

5. Se tienen 200 cajas con 30 bolsas de café cada una. Si cada bolsa pesa 0,5kg. Para calcular el peso total del café se debe:

A) Dividir la cantidad de cajas entre el número de bolsas y el resultado multiplicarlo por el peso de cada bolsa.
B) Dividir la cantidad de bolsas entre el peso de cada una y el resultado multiplicarlo por la cantidad de cajas.
C) La cantidad de bolsas multiplicarlo por el peso de cada una y este resultado multiplicarlo por el número de cajas.
D) La cantidad de bolsas dividirlo entre el peso de cada una y este resultado multiplicarlo por la cantidad de bolsas.

6. Un artículo se compra en $280, si se le quiere ganar el 10%, al venderlo, se debe etiquetar en:

A) $380 B)$ 308 C) $300 D) $310

7. 11 obreros realizan una obra rectangular de 220m de largo y 48 m de ancho en 6 días. Para realizar una obra similar de 300m de largo por 56 de ancho en 5 días, se necesitan:

A) 20 0breros B) 50 obreros C) 21 obreros D) 25 obreros

8. Considere a ($\mathbb{P}$) el conjunto de los números primos, $\mathbb{N}$ el conjunto de números naturales, Z el conjunto de números enteros, R el de los reales, $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos e (I) el conjunto de los números imaginarios, luego podemos afirmar que es verdadera:

I. $R \subseteq \mathbb{C}$

II. $\mathbb{P} \not\subset R$

III. $N \cap R = \mathbb{N}$

A) I y II únicamente B) I y III únicamente C) I, II y III D) III únicamente

9. El termómetro está marcando 8°C, después de haber subido a 18°C. La temperatura inicial es:

A) 10 B) -10 C) 26 D) 8

10. En un supermercado se venden latas de refrescos en paquetes de 5 latas. Si el vendedor acomoda las latas en 5 pisos y en cada piso coloca 5 latas de refrescos. El número de latas que colocó en total es (expréselo en forma de potencia):

A) $125= 5^3$ B) $625 = 5^4$ D) $3125 = 5^5$ D) $25 = 5^2$

11. Diez (10) llaves abiertas durante 8 horas diarias han derramado una cantidad de agua que tiene un valor de $70.000. Averiguar ¿cuánto hay que pagar por el agua que botan 15 llaves abiertas 10 horas durante igual número de días?

A) $80.000 B) $87.500 C) $90.000 D) $97.000

CAPÍTULO 2

LOGROS

Al concluir el estudio de este capítulo, el estudiante:

- Identifica los términos de una expresión algebraica.
- Realiza operaciones con polinomios.
- Identifica y desarrolla con precisión los productos especiales.
- Desarrolla las potencias positivas de un binomio con el Binomio de Newton.
- Ejecuta correctamente los casos de factorización.
- Identifica los métodos de solución de ecuaciones simultáneas.
- Resuelve sistemas de ecuaciones simultáneas.
- Analiza correctamente una función cuadrática.
- Representa e identifica gráficos de funciones.
- Identifica cuando una función es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva y constante.
- Diferencia una ecuación de una inecuación.
- Resuelve ejercicios que dan lugar a ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una variable.

2. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una expresión algebraica es la combinación de números y letras conectadas con signos de operaciones como suma, resta, multiplicación, división, etc.

La expresión $\mathbf{4X^3 + 6X^2 + 8X - 6}$; es un polinomio en la variable **X** y de grado **3**.
Sus términos son: $4X^3$, $6X^2$, $8X$ y -6 ; de grados 3, 2, 1 y 0.
El término $4X^3$, es de grado 3, y, 4 es su coeficiente.

2.1 Terminología

Constante: Es una cantidad que no cambia de valor. En general todo número. 5, $\sqrt{2}$, 9.

Variable: Es una cantidad que puede asumir diferentes valores. Se puede representar con cualquier letra, como por ejemplo, **X, Y, a, b**, etc.

Coeficiente: Es una literal o un valor numérico que acompaña la variable de una expresión algebraica.

Ecuación: Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que contiene una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas. La ecuación solo se verifica para determinados valores de las incógnitas.

Ejemplo: 3m - 5 = 4 + m**; 3 m-5**, se denomina miembro de la izquierda (del izquierda del igual) y **4 + m**, se llama miembro de la derecha del igual.

Término: Es el producto entre una constante y una variable. Ej. a) $\mathbf{3X^2}$ b) $\mathbf{-4m^3y}$

Se denomina término independiente al que está formado por un solo numérico sin parte literal.

2.2 Construcción de expresiones algebraicas

Analice cada uno de los siguientes ejercicios y seleccione la respuesta correcta:

1. El perímetro de un rectángulo de lado **a** y **b,** es:
   A) 4L B) 4a C) La D) 2 (a + b)

2. El cuadrado de la suma de dos números **a** y **b,** es:
   A) $a^2 + b^2$ B) 2a + 2b C) $(a + b)^2$ D) $(2^a * 2b)^2$

3. El triple del producto de dos números X y Y**,** es:
   A) 3 +(X)(Y) B) 3XY C) 3 (X + Y) D) 3X + 3Y

4. El producto de la suma por la diferencia de dos números X y Y**,** es:
   A) (X * Y) (X – Y) B) (X – Y(X –Y) C) (X – Y)(X + y) D) (X +y) (X – Y)

2.3 Solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

a) $X+13 = 8X - 15$
$13 + 15 = 8X - X$
$28 = 7X$
$\frac{28}{7} = X$
$4 = X$

b) $-15 + 3X = 12X - 8$
$3X - 12X = -8 + 15$
$-9X = 7$
$X = \frac{-7}{9}$

c) $5/(x-4) = 6/(x-3)$ c) $(X/6)-(2X/5) = (3/2)-X$ d) $5(X-4)+3X=-(3X+4)$

2.4 Solución de inecuaciones

Las inecuaciones son enunciados que contienen los signos $<$, $\leq$, $>$, $\geq$

a) $(-2X)/4 < 9-5X$
$-2X < 4(9 - 5X)$
$-2X < 36 - 20X$
$-2X + 20X < 36$

$18X < 36$

$X < 36/18$
$X < 2$

b) $-4x+5 \leq 21$
$-4x \leq 21 - 5$
$-4x \leq 16$
$x \geq \frac{16}{-4}$ La desigualdad cambia de sentido
$x \geq -4$ porque se dividió entre un número negativo

c) $12X-18 \geq 14X$ d) $(5/4)+10X \leq -8$

2.5 Valor absoluto

Valor absoluto de una cantidad es el número que representa la cantidad sin tener en cuenta el signo o sentido de dicha cantidad.
Se escribe así: $|a|$; se lee: **"valor absoluto de a"**

$|a| = \begin{cases} a; \text{ si, } a > 0, \text{ es decir, el valor absoluto de un número real positivo es él mismo.} \\ \text{Ejemplo, } |7| = 7, \quad \left|\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}, \quad |\sqrt{2}| = \sqrt{2} \\ 0; \text{ si, } a = 0, \text{ el valor absoluto de 0 es 0, } \quad |0| = 0 \\ -a; \text{ si, } a < 0, \text{ el valor absoluto de un número real negativo es el positivo} \\ \text{correspondiente } \quad |-5| = 5, \quad \left|\frac{-4}{5}\right| = \frac{4}{5} \end{cases}$

2.6 Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

Absoluto, se debe considerar dos casos: uno donde se supone que la cantidad al interior del valor absoluto es **mayor que cero** y otro en que tal cantidad es **menor que cero**.

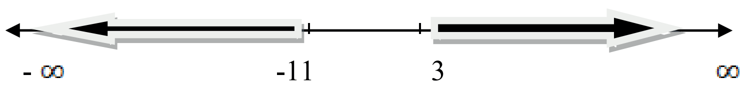
Ejemplo. Resolver la ecuación: $| X - 5 | = 12$
Solución, se consideran dos casos:

1°. Suponiendo que X - 5 > 0, entonces:	2° Suponiendo que X - 5 < 0, entonces:
$X - 5 = 12$	$-(X - 5) = 12$
$X = 12 + 5$	$-X + 5 = 12$
$X = 17$	$-X = 12 - 5$
	$-X = 7$
	$X = -7$
Comprobación: $| 17-5 | = | 12 | = 12$ $| -7-5 | = | -12 | = 12$	

Ejemplo. En la inecuación: $| 2x + 8 | > 14$, encuentre los valores de "X" y haga la gráfica.

1° si, $2X + 8 > 0$	del valor absoluto sale igual $2X + 8 > 14$, se despeja X, luego **X>3**
2° si, $2X + 8 < 0$	del valor absoluto sale $-(2X + 8) > 14$, se despeja X, luego **X< -11**

Aquí se debe tener en cuenta que en una inecuación cuando se pasa a dividir o a multiplicar por un número negativo cambia de sentido la desigualdad.



$S = (-\infty, -11) \cup (3, \infty)$

Resolver: 1) $\left| \frac{x}{4} - 5 \right| \leq 6$ 3) $| 10 + 3x | > 2x + 6$

2) $| 9-3Y | = 12$ 4) $| 4X + 9 | \geq 15$

2.7 Operaciones con expresiones algebraicas

Suma: Sumar expresiones algebraicas es reducir los términos semejantes

Ejemplo. Sumar: $3x + 4Y - X^2 -10r$, **con** $-20X + 12X^2$ **con** $+8r +6 = -17X + 4Y -2r +11X^2 +6$

$3x + 4Y - X^2 -10r \; -20X + 12X^2 \; +8r +6 =$

$\mathbf{-17X + 4Y -2r + 11X^2 +6}$

Resta: Es necesario identificar cuál es el minuendo y cuál el sustraendo

Ejemplo: **DE**: $4m^2 + 5X -8$ **RESTAR** $-5X +20 +12m^2 - 15 +c$; se procede así:

$4m^2 +5X -8 -(-5X +20 +12m^2 -15 +c) = 4m^2 + 5X -8 +5X -20 -12m^2 +15 +c=$ $\mathbf{-8m^2 +10X-13+c}$

Ejemplo: **RESTAR** $5 -m^4 +3X$ **DE** $12X +8m^4 -12 + p$; escribimos el minuendo y luego el sustraendo,

$12X +8m^4 -12 + p - (5 -m^4 +3X) = 12X +8m^4 -12 + p -5 +m^4 - 3X =$ $\mathbf{9X + 9m^4 -17 + p}$

Multiplicación

Ejemplo. Multiplicar: $(5m^3 n)(-7m^2 nY^3) =$ $\mathbf{-35\, m^5\, n^2\, y^3}$

Ejemplo. Multiplicar: $(2X^3 + 4)(-6X^3 -8) = -12X^6 -16X^3 -24X^3 -32 =$ $\mathbf{-12X^6 -40X^3 -32}$

O también

$$\begin{array}{r} 2X^3 + 4 \\ -6X^3 - 8 \\ \hline -12X^6 - 16X^3 \quad\quad \\ -24X^3 - 32 \\ \hline -12X^6 - 40X^3 - 32 \end{array}$$

Ejercicios. Resuelva los siguientes productos:

a) $(X^2 -4X + 6)(-3X)$
b) $(X^3 +2X^2 - X)(X^2 -2X +5)$
c) $(X^4 + 3X^3 - 5X^2 +8)(X^3 -2X^2 -7)$
d) $(m^2 + mn + n^2)(m - n)$
e) $(X^2 -2XY + Y^2)(XY - X^2 +3Y^2)$
f) $(m^3 - X^2 + X)(X^2 - 1)$

División de dos polinomios de dos o más términos

Para realizar esta operación, se procede de la siguiente forma:

Ejemplo. Hallar el cociente de $14X^2 + 8$ entre $4 + 2X$

Solución:

Se ordena el polinomio dividendo y el divisor con respecto a una variable, en forma decreciente, dejando el espacio para la variable ausente y se dispone la operación así:	$\begin{array}{l\|l} 14X^2 + 0 + 8 & 2X + 4 \\ \hline \end{array}$
Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, este cociente se multiplica por todos los términos del divisor y el producto se resta del dividendo.	$\begin{array}{l\|l} 14X^2 + 0 + 8 & 2X + 4 \\ \hline -14X \quad -28X & 7X \\ 0 \quad -28X + 8 & \end{array}$
Se toman los términos del Polinomio resultante y se continua con la división.	$\begin{array}{l\|l} 14X^2 + 0 + 8 & 2X + 4 \\ \hline -14X^2 - 28X & 7X - 14 \\ \quad - 28X + 8 & \\ \quad + 28X + 56 & \\ \quad 0 \quad +64 & \end{array}$
Luego, $(14X^2 + 8) \div (2X + 4)$, es:	$7X - 14$

2.8 Productos notables

2.8.1 Binomio al cuadrado

$$(X + Y)^2 = X^2 + 2(X)(Y) + Y^2 = X^2 + 2XY + Y^2$$

Es igual al cuadrado de la primera cantidad más el doble producto de la primera cantidad por la segunda más el cuadrado de la segunda.
Ejemplo. $(2X + 4)^2 = (2X)^2 + 2(2X)(4) + (4)^2 = \mathbf{4X^2 + 16X + 16}$

2.8.2 Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades

$$(X + Y)(X - Y) = X^2 - Y^2$$

Es igual a la diferencia del cuadrado de las dos cantidades.
Ejemplo. $(X + 8)(X - 8) = X^2 - 8^2 = \mathbf{X^2 - 64}$

2.8.3 Cubo de un binomio

$$(X + Y)^3 = X^3 + 3X^2 Y + 3XY^2 + X^3$$

Es igual al cubo de la primera cantidad más el triplo del cuadrado de la primera por la segunda, más el triplo de la primera por el cuadrado de la segunda, más el cubo de la segunda.
Ejemplo. $(2X + 3)^3 = (2X)^3 + 3(2X)^2(3) + 3(2X)(3)^2 + (3)^3 = \mathbf{8X^3 + 36X^2 + 54X + 27}$

2.8.4 Producto de dos binomios de la forma (x + a)(x + b)

$$(x + a)(x + b) = X^2 + bX + aX + ab$$

Ejemplo: a) $(X - 5)(X + 2) = X^2 + 2X - 5X - 10 = X^2 - 3X - 10$
b) $(m^x + b^y)(m^x - b^y) = m^{2x} - b^{2y})$

2.8.5 Binomio de Newton

$(X + Y)^0 = 1$
$(X + Y)^1 = X + Y$
$(X + Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$
$(X + Y)^3 = X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3$

En las anteriores potencias, se observa:

Cada expresión tiene un término más que lo que indica la potencia.

1. Los exponentes de (X) van decreciendo en 1 y los de (Y) van creciendo en 1.
2. La suma de los exponentes de (X) y (Y) debe ser igual al valor de la potencia que se busca.
3. El coeficiente del primero y último término siempre son iguales a 1.
4. El coeficiente de cada término se halla multiplicando el coeficiente del término anterior por el exponente de (X) de ese término y este producto se divide entre el exponente de (Y) aumentado en 1.

Entonces, $(X + Y)^4 = X^4 + 4X^3Y + 6X^2Y^2 + 4XY^3 + Y^4$

$(X + Y)^5 =$

$(X + Y)^6 =$

2.8.6 Triángulo de Pascal

Los coeficientes en los desarrollos anteriores se pueden disponer en la forma triangular que se muestra enseguida, llamada Triángulo de Pascal y que permite calcular los coeficientes de $(X + Y)^{n+1}$ si se conoce los de $(X + Y)^n$.

$(X + Y)^0$							1						
$(X + Y)^1 =$						1		1					
$(X + Y)^2 =$					1		2		1				
$(X + Y)^3 =$				1		3		3		1			
$(X + Y)^4 =$			1		4		6		4		1		
$(X + Y)^5 =$		1		5		10		10		5		1	
$(X + Y)^6 =$	1		6		15		20		15		6		1

2.9 Factorización

Factorizar una expresión algebraica es descomponerla como producto indicado de dos o más factores.

2.9.1 Factor común

Ejemplo. Factorizar: a) $10X^2 - 5X + 15X^3$; para hallar el factor común se procede así:

- Se halla el M.C.D. de los coeficientes,
- Se escoge la literal común con menor exponente
- $10X^2 - 5X + 15X^3 =$ **$5X(2X - 1 + 3X^2)$**

2.9.2 Diferencia de cuadrados

Es igual al producto de la suma de las raíces de los términos por la diferencia de ellos.

Ejemplo. Factorizar: $X^2 - Y^2 =$ **$(X + Y)(X - Y)$**
X Y

2.9.3 Factor común por agrupación de términos

Ejemplo. Factorizar: $3X^2 - 6XY + 4X - 8Y = (3X^2 - 6XY) + (4X - 8Y) =$
$= 3X(X - Y) + 4(X - Y)$
$=$ **$(X - Y)(3X + 4)$**

2.9.4 Trinomio cuadrado perfecto

1. Es cuadrado perfecto cuando se pueden ordenar de tal manera que el primero y tercero términos son cuadrados perfectos, (es decir, tienen raíz cuadrada exacta) y el segundo término es $\pm$ dos veces el producto de la primera raíz por la segunda.
2. La factorización es igual al cuadrado de la suma o la diferencia de las raíces, según el caso, de las raíces (del primero y tercer término).

Ejemplo. Factorizar: $25X^2 + 20X + 4 =$ **$(5X + 2)^2$**
5X 2(5X) (2) 2

Ejemplo. Factorizar: $36X^2 - 60X + 25 =$ **$(6X - 5)^2$**

2.9.5 Trinomio de la forma: $X^2 + bx + c$

1. Se abren dos paréntesis, al principio de cada uno se coloca la raíz del primer término,
2. En el primer paréntesis se coloca el segundo signo y,
3. En el segundo paréntesis se coloca el producto del segundo signo por el tercero
4. Se buscan dos números que multiplicados de un número con signo y valor igual al coeficiente de **b**, y que sumados o restados, según el caso, de un valor igual al coeficiente de **x.**

Ejemplo. Factorizar: a) $X^2 + 5X + 6 = \mathbf{(X + 3)(X + 2)}$
b) $X^2 - 4X - 21 = \mathbf{(X - 7)(X + 3)}$

2.9.6 Trinomio de la forma: $aX^2 + bX + c$

Se diferencia del anterior porque el coeficiente del primer término es diferente de cero ($a \neq 0$). Se procede como en el ejemplo siguiente:

Ejemplo. Factorizar: $3X^2 - 5X - 2$

Se multiplica y divide el polinomio por el Coeficiente de X^2, 3 en este caso, pero los Resultados se disponen así:	$\frac{3(3X^2) - 3(5X) - 3(2)}{3}$
Se organizan los datos,	$\frac{(3X)^2 - 5(3X) - 6}{3}$
Se factoriza como de la forma X^2+bx+c,	$\frac{(3X - 6)(3X + 1)}{3}$
Se obtiene el factor común,	$\frac{3(X - 2)(3X + 1)}{3}$
Finalmente se simplifica,	$(X - 2)(3X + 1)$

2.10 Sistema de ecuaciones simultáneas

Un sistema de ecuaciones es simultáneo cuando lo satisfacen los mismos valores de la incógnita.

Un sistema es la reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas.

Existen varios métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales (con incógnitas de grado 1): Método de igualación, método de sustitución, método de suma o resta, método por determinantes, método por matrices y método gráfico.

Ejemplo. Hallar la solución del sistema (igualación): X + 3Y = 6 y 5X – 2Y = 13

Método de igualación, se despeja la misma variable en ambas ecuaciones y se igualan.	Ejemplo. Resolver: X + 3Y = 6 5X – 2Y = 13
Se despeja la misma variable en ambas ecuaciones,	X = 6 – 3Y X = (13 + 2Y)/5
Se igualan los valores despejados,	6 – 3Y = (13 + 2Y)/5 30 -15Y = 13 + 2Y 30 -13 = 15Y +2Y 17 = 17Y 17/17 = Y 1= Y
Se reemplaza este valor de (Y) en la segunda ecuación,	X = 6 – 3Y X = 6-3 (1) X = 3
COMPROBACIÓN	Si: X=3 y Y= 1, entonces: 3 + 3 (1) = 6 5(3) – 2 (1) = 13

Método de sustitución, se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones y este valor se sustituye en la otra ecuación.	Ejemplo. Resolver: X + 3Y = 6 5X – 2Y = 13
Se despeja (X) en la primera ecuación,	X = 6 – 3Y

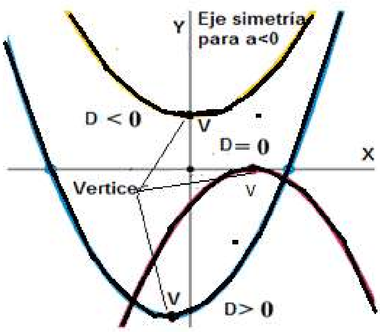
Se reemplaza este valor en la segunda ecuación,	5(6 – 3Y) - 2Y = 13 30 – 15Y -2Y = 13 30 – 13 = 15Y +2Y 17 = 17Y $\frac{17}{17} = Y$ 1 = Y
Se reemplaza el valor de (Y) en la otra ecuación,	X = 6 – 3 (1) X = 3

Método de reducción (Suma o resta). En este caso se necesita que alguna de las variables tenga igual coeficiente y distinto signo en las dos ecuaciones.	Ejemplo. Resolver: X + 3Y = 6 y 5X – 2Y = 13
Se multiplica la primera ecuación por (-5), y, se restan las ecuaciones,	-5 (X + 3Y = 9) - 5X – 15Y = -30 5X - 2Y = 13 -17Y = -17 $Y = \frac{-17}{-17}$ Y = 1
Se reemplaza el valor de (Y) en cualquiera de las ecuaciones.	X = 6 – 3 (1) X = 3

2.11 Análisis completo de la función cuadrática $Y = aX^2 + bX + c$

Modelo de ecuación cuadrática………… $ax^2 + bX + c = 0$

En general:



Signo del coeficiente de (X^2):
Si, a > 0; la parábola abre hacia arriba
Si, a < 0; la parábola abre hacia abajo

Valor del discriminante (b^2 -4ac)= D
D < 0; no tiene raíces reales. Tiene dos Raíces complejas conjugadas.
D = 0; Tiene una raíz real (doble).
D > 0; Tiene dos raíces reales diferentes.

Ejemplo. $Y = f(X) = X^2 + 8X + 15$

a = 1; como **a>0**, indica que la parábola **abre hacia arriba**, b = 8; c = 15

Coordenadas del vértice: V(h, k)

$\mathbf{h} = \frac{-b}{2a}$ h = -(8)/2(1) = -8/2 = -4

$\mathbf{k} = \frac{4qc-h^2}{4a}$ K = [(4)(1)(15)] –(8)^2]/[(4)(1)] =(60 -64)/4 = -4/4 = -1

o, evaluando la ecuación en (-4): $k = f_{(-4)} = (-4)^2 + 8(-4) + 15 = 16 - 32 + 15 = -1$

Luego el vértice es: **V (- 4, -1)**
Cortes con el eje **"x".**

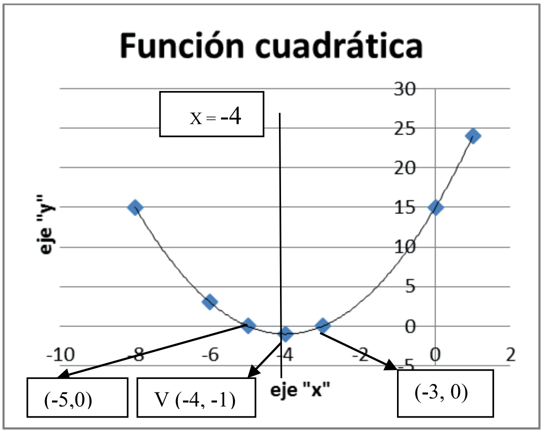
Para ello se halla la solución de la ecuación, es decir, se calcula el valor de las dos raíces, lo que se logra con:

a) factorización (en caso de ser factorizable)
$X^2 + 8X + 15 = 0$; $(X + 5)(X + 3) = 0$
$X+5 = 0$ o $X+3 = 0$, de donde: **X = -5** y **X = -3**

b) fórmula general: $X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(15)}}{2(1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-60}}{2} =$
$\frac{-8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-8 \mp 2}{2}$;
X=-6/2= -3 X = -10/2 = -5

Corte con eje "y" Se halla cuando X = 0, entonces:
$Y = f_{(x)} = (0)^2 + 8(0) + 15 = 15$ es decir, que el corte con "Y" es: **(0, 15)**

Eje de simetría. Es la perpendicular al eje "X" que pasa por el vértice. **X = - 4**



Dominio de la función:
D$_{(f)}$ = $\{ x/ x \in R\}$

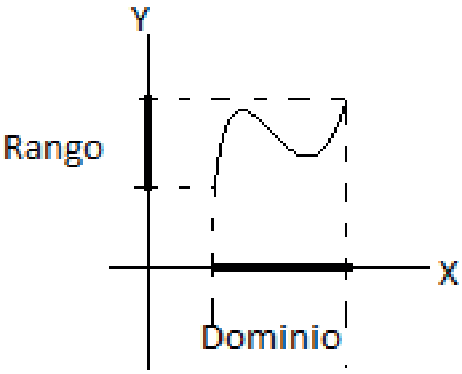
Rango de la función:
R$_{(f)}$ = $Y \geq -1$ o, $(-1, +\infty)$

Decrece: $X \in (-\infty, -4)$

Crece: $X \in (-4, +\infty$

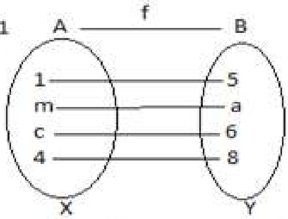
2.12 Funciones

En matemática el término FUNCIÓN se usa para indicar una correspondencia o relación entre dos cantidades, que satisfacen la condición, cuando a todos los elementos del primer conjunto (conjunto de salida) les corresponde uno y solo un elemento del segundo conjunto (conjunto de llegada).



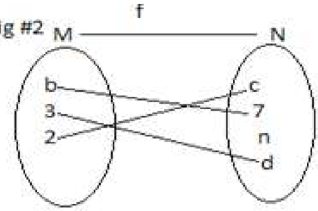
DOMINIO. Es el conjunto formado por todos los elementos del primer conjunto.
CODOMINIO. Es el conjunto formado por todos los elementos del segundo conjunto.
RANGO. Es el conjunto formado por los elementos del segundo conjunto que son Imagen, es decir, es el conjunto de imágenes.

Sean los conjuntos A y B:

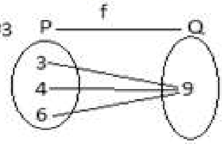
fig #1


En la fig #1, se observa que a cada ele mento del primer conjunto (preimagenes) le corrrsponde un ele- mento del segundo conjunto (imagen)

Dominio: Df = {1, m, c, 4}
Codominio: Cf = {5, a, 6, 8}
Rango: Rf = { 5, a, 6, 8}

fig #2


En la fig #2, tambien a cada preimagen le corresponde una imagen.
Dominio: Df = {b, 3, 2 }
Codominio: Cf = { c, 7, d, n}
Rango: Rf = { c, 7, d}

fig #3


Dominio: Df ={3,4,6}
Codominio: Cf = {9}
Rango: Rf ={9}

Las figuras #1, #2 y #3, corresponden a Funciones.

Normalmente el **DOMINIO** de una función es el conjunto de los números Reales pero hay funciones cuyo dominio excluye algunos valores. Para calcular el dominio de una función se debe tener en cuenta:

<table>
<tr><td colspan="2">1°. Si la función es racional, se excluye el valor mediante el cual su denominador de CERO.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo: f(x) = $\frac{m+3}{m-2}$</td><td>Como su denominador no puede ser cero, se iguala el denominador a cero y se despeja la variable m para conocer el valor que se excluye en el dominio.
Así: m – 2 =0 entonces
m = 2
Lugo el DOMINIO son todos los reales menos el número 2,
Porque hace cero el denominador de la función racional. Df = R – {2}</td></tr>
<tr><td colspan="2">2° Si la función tiene un radical con índice PAR, el sub radicando debe ser mayor o igual a cero.</td></tr>
</table>

Ejemplo. f(m) = $\sqrt{m-2}$ $\sqrt{m-2}$	En este caso: $m - 2 \geq 0$ entonces: $m \geq 2$ Luego el dominio de la función f(m), son todos los números Reales mayores o iguales a 2.
3° Si la función es logarítmica, se debe saber que el parámetro del logaritmo debe ser mayor que cero.	
Ejemplo. $f(x)=\log(X^2 - 9)$	En este caso $X^2 - 9 > 0$, se hallan los valores de (X), así: $X^2 - 9 > 0 \Rightarrow$ $X^2 > 9 \Rightarrow$ $\lvert X \rvert > 3 \Rightarrow$ $X > 3$ $X < -3$

Rango

Son todos los elementos que son imagen. Para calcular el rango de una función se halla el dominio de la FUNCION INVERSA.

Ejemplo. Hallar el rango de: $Y = \frac{2X+3}{X-1}$; para hallar el rango se despeja "X".

$$Y(X - 1) = 2X + 3$$
$$YX - Y = 2X + 3$$
$$YX - 2X = Y + 1$$
$$X(Y - 2) = Y + 1$$
$$X = \frac{Y+1}{Y-2}$$

Observe que en el denominador:

$Y - 2 = 0$ entonces

$Y = 2$.

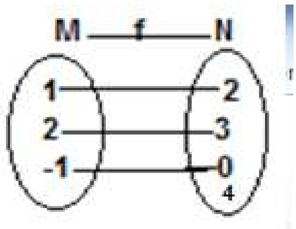
Luego el RANGO ES: $Rf = R - \{2\}$

2.13 Clases de funciones

Función inyectiva

Sea la función f: M N, definida por $Y = X + 1$, entonces:

X	1	2	-1
f(x)	2	3	0



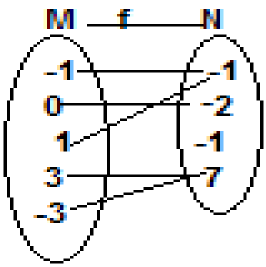
f = {(1,2), (2,3), (-1, 0)}

Una función f:M- N, es INYECTIVA, si a elementos distintos del dominio asigna imágenes distintas. Entonces: f (x) = X^2 no es inyectiva porque f (-2) = f (2)

Función sobreyectiva

Sea la función f: M N, definida por Y = X^2 -2, entonces:

X	-1	0	1	3	-3
f(x)	-1	-2	-1	7	7



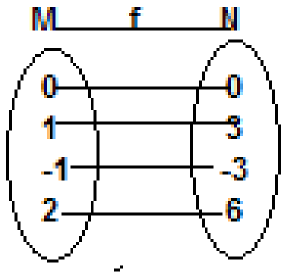
f= {(-1,-1),(0,2),(1,-1),(3,7),(-3,7)}

Una función f: M $\longrightarrow$ N, es SOBREYECTIVA, si cada elemento del codominio es imagen de al menos un elemento del dominio.

Función biyectiva

Sea la función f: M N, definida por Y = 3X, entonces:

X	0	1	-1	2
f(x)	0	3	-3	6



f = {(0,0), (1,3), (-1,-3), (2,6)}

Cada elemento del codominio es imagen de un elemento del dominio y la función es inyectiva. Entre los conjuntos M, N existe una correspondencia biunívoca.

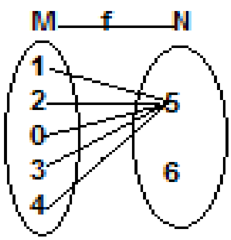
Una función f es BIYECTIVA, si y solo si **f** es inyectiva y sobreyectiva.

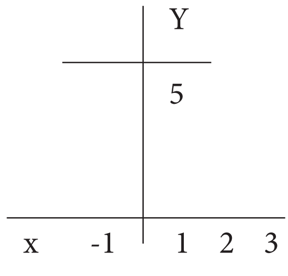
Función constante

Se llama función constante a la que toma el mismo valor para cualquier valor de la variable independiente.

Sea f la función f (x) = c

X	1	2	0	3
F(x)	5	5	5	5

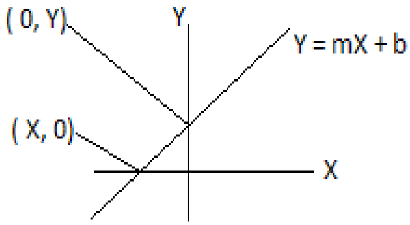




f = {(1,5), (2,5), (0,5), (3,5), (4,5)}
Un único elemento del rango es imagen de todos los elementos del dominio.

2.14 Función lineal

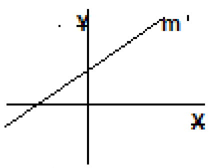
Su gráfica es una recta y su ecuación es: f(x) = Y = mx + b; donde m es la pendiente y b es el corte de la recta con el eje "Y". Para graficarla se debe tabular.



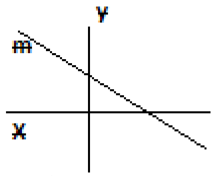
La pendiente, es un número real, se denota por m. Se calcula conociendo dos puntos cualesquiera de la recta. Dados dos puntos (X,Y) y (X_1 ,Y_1) de una recta, donde $X \neq X_1$ la pendiente es: $\mathbf{m} = \frac{Y1-Y}{X1-X}$

Cuando la ecuación tiene la presentación Y = mx + 0 (con y despejada) recibe el nombre **de ecuación de pendiente- intercepto.**

Cuando la pendiente de una recta es positiva, significa que la recta se inclina a la derecha y si es negativa se inclina a la izquierda.



Pendiente positiva



Pendiente negativa

En el caso que $X = X_{1,}$ la recta M es vertical o sea es perpendicular al eje X (fig. 1). En este caso el denominador de la fórmula de la pendiente es cero ($X-X_1 = 0$), por lo tanto la pendiente no está definida (no existe).

En el caso que $Y = Y_1$, los puntos A y B tienen la misma ordenada y por consiguiente la recta M (fig.2) es paralela al eje X. En este caso como $Y-Y_1 = 0$, la pendiente m de la recta A es igual a cero.

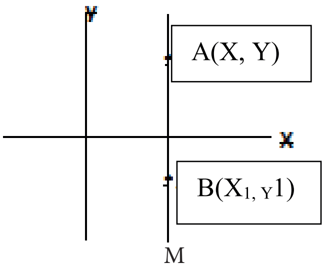


Fig. 1

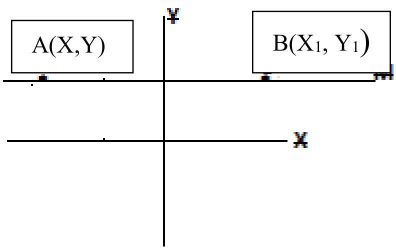


Fig. 2

Recuerde que para graficar una función se debe tabular, es decir, darle valores a "X" para obtener los de "Y".

Ejemplo. Calcular la pendiente de una recta que pasa por los puntos M(-2, 3) y (2, 4). Tenga en cuenta que no importa cuál de ellos se toma como primer punto o como segundo.

$$\mathbf{m} = \frac{4-3}{2-(-2)} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

De la ecuación: $\mathbf{m} = \frac{Y1-Y}{X1-X}$, se obtiene $\mathbf{(X - X_1)(m) = Y - Y_1}$, que permite hallar la ecuación de la recta cuando se conocen dos puntos.

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos M(-2, 6) y (3, 2)

$$\mathrm{m} = = \frac{2-6}{3-(-2)} = \frac{-4}{3+2} = \frac{-4}{5}$$

$$Y - 2 = [X - (-2)]\left(\frac{-4}{5}\right)$$

$$Y-2 = \left(\frac{-4}{5}\right)(X + 2)$$

$$5(Y-2) = (X+2)(-4)$$

$$5Y - 10 = -4X - 8$$

$5Y-10 = -4X -8$ luego $5y = -4X -8 +10$; $\mathbf{Y} = \frac{-4X}{5} + \frac{2}{5}$

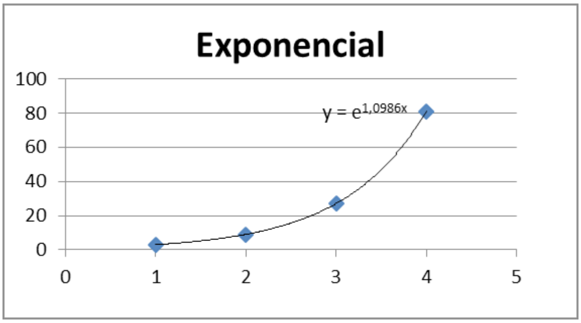
2.15 Función exponencial

Es la que puede escribirse como f (x) = b^x; donde (b) es una constante positiva diferente de 1 y X es un número real.

Tabulación

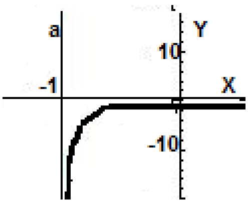
X	y= 3^x
1	3
2	9
3	27
4	81

Gráfica

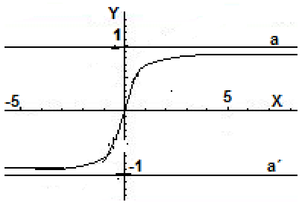


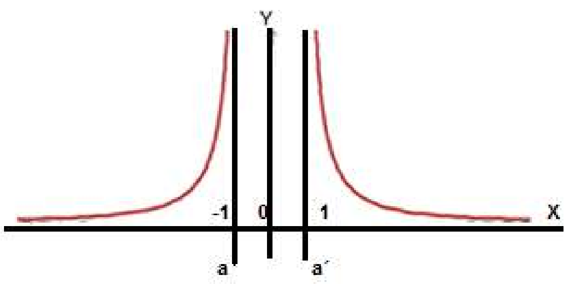
2.16 Asíntota

La asíntota es una recta que al prolongarla indefinidamente se aproxima continuamente a una curva sin tocarla. Se dice que ambas tienen un comportamiento asintótico.



En el gráfico de la izquierda la asíntota a =-1
En el gráfico de la derecha
Hay asíntota doble horizontal a=1; a´=-1





Asíntota

Se llama asíntota de una función f (x) a una recta "a" cuya distancia a la curva tiende a cero, cuando "X" tiende a infinito.

En las asíntotas verticales, la "x" no tiende a infinito.

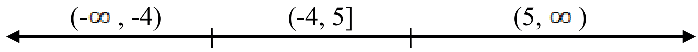
2.17 Inecuaciones de segundo grado

Ejemplo. Hallar la solución de la inecuación, $X^2 - X - 20 > 0$

1° la inecuación se iguala a cero para encontrar los puntos críticos,

$$X^2 - X - 20 = 0$$
$$(X -5)\ (X +4) = 20$$
$$(X -5) = 0 \quad \text{o} \quad (X + 4) = 0$$
$$X -5 = 0 \quad \text{o} \quad X + 4 = 0$$
$$X = 5 \quad \text{o} \quad X = -4$$

2° Se ubican los puntos críticos en una recta Real y se observa que esta queda dividida en tres intervalos:



3° Se evalúa cada intervalo en la inecuación para observar en cual se cumple.

- Si a "X" se le da un valor cualquiera del primer intervalo, por ejemplo -7, se observa que la inecuación se cumple,

$$(-7)^2 - (7) \ - 20 > 0$$
$$49 -7 -20 > 0$$

$22 \ > 0$ **VERDADERO,** quiere decir que en este intervalo **se** cumple la desigualdad.

- Si a "X" se le da un valor cualquiera del segundo intervalo, por ejemplo cero (0), se observa que la inecuación no se cumple,

$$(-0)^2 - (0) \ - 20 > 0$$
$$0 -0 -20 > 0$$

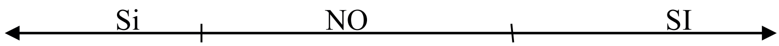
$-20 \ > 0$ **FALSO,** quiere decir que en este intervalo **NO** se cumple la desigualdad.

- Si a "X" se le da un valor cualquiera del tercer intervalo, por ejemplo (8), se observa que la inecuación se cumple,

$$(8)^2 - (8) \ - 20 > 0$$
$$64 -8 -20 > 0$$

$36 \ > 0$ **VERDADERO,** quiere decir que en este intervalo **se** cumple la desigualdad.

En resumen:



Solución: $(-\infty, -4) \cup (5, \infty)$

Debe tener en cuenta que si la inecuación es de la forma: $\leq$ o $\geq$, se deben incluir los extremos de los intervalos.

Ejemplo. Hallar la solución de $X^2 + X - 6 \leq 0$

1° Se hallan los puntos críticos igualando la inecuación a cero y factorizando.

$X^2 + X - 6 = 0$ $\qquad (x + 3)(x - 2) = 0$

$X + 3 = 0$ ó $X - 2 = 0$

$X = -3$ $\qquad X = 2$

2. Se evalúa la inecuación con cualquier valor de cada uno de los intervalos para saber cuál la satisface.

Para $X = -5$ $\rightarrow$ $(-5)^2 + (-5) - 6 \leq 0$

$25 - 5 - 6 \leq 0$

$9 \leq 0$ **Falso**. Significa que cualquier valor de este intervalo Satisface la inecuación.

Para $X = 0$ $\rightarrow$ $(0)^2 + (0) - 6 \leq 0$

$-6 \leq 0$ **Verdadero**. Significa que cualquier valor de este intervalo

Satisface la inecuación.

Para $X = 4$ $\rightarrow$ $(4)^2 + (4) - 6 \leq 0$

$16 + 4 - 6 \leq 0$

$14 \leq 0$ **Falso**. Significa que cualquier valor de este intervalo Satisface la inecuación.

En resumen:

Solución: [-3, 2]

EJERCICIO DE APLICACIÓN DEL CAPÍTULO

Encontrar la expresión de una situación descrita
Selección múltiple con una respuesta.

1. Mario debía \$50 y le pagaron \$180. Su estado económico es:

A) \$50 B) \$130 c) \$180 D) \$230

2. Si alguien tiene \$500, cobra \$25 y le cancelan una deuda por \$40. La expresión que representa su situación es:

A) \$485 B)\$65 C) \$460 D) \$565

3. Un tendero tenía una determinada suma de dinero, gastó \$250, entonces le quedó:

A) X B) x - \$250 C) \$250 – X D) \$250X

4. La suma de 6 unidades al doble de un número es:

A) X + 6 B) 2X + 12 C) 2X +6 D) 2 (6) + 12

5. La suma de tres números naturales consecutivos es:

A) X+(X+1)+(X+2) B) X+X+2+X+3 C) X+X-1+X-2 D) X+2X+3X

6. El largo es el doble del ancho de un salón de clase, su área es:

A) (X/2X) (X) B) 2+X C) X (2X) D) X (X/2)

7. La razón de un número y 3 es:

A) 3X B) X + 3 C) 3/X D) $\frac{X}{3}$

8. Los dos quintos de un número es:

A) 2(5x) B) $(\frac{2}{5})(X)$ C) $(\frac{2}{X})(5)$ D) $(\frac{X}{5})(2)$

9. El número repartido entre 3 partes iguales es:

A) X(3) B) X+3 C) $(\frac{X}{3})$ D) 3 – X

10. La quinta potencia de un número es:

A) 5X B) X + 5 C) X^5 D) 5^X

11. La cuarta parte de la suma de dos números es:.

A) $\frac{X+Y}{4}$ B) $\frac{X}{4} + Y$ C) $\frac{4+X}{Y}$ D) $\frac{Y}{4} + X$

12. El producto de 15 y x aumentado en 12 es:

A) 15(X + 12) B) 15X + 12 C) X (15 + 12) D) 12X +15

13. El triple de la suma de x con 10 es:

A) 3X + 10 B) 3 (X + 10) C) 10 (X + 3) D) 3 (10X)

14. El doble de x aumentado en 20 es:

A) 2 (X + 20) B) 2X + 20 C) 2 (20X) D) 20X+2

15. El cubo del producto de x y 8 es:

A) $(8X)^3$ B) $8X^3$ C) 8^3 X D) 3 (8X)

16. El producto de 5 y la diferencia de 10 menos x es:

A) X (10 – 5) B) 5X – 10 C) 5 (X – 10) D) 5(10 – X)

17. 10 menos el producto de x y 5 es:

A) $10 - 5 - X$ B) $10 - 5X$ C) $5 - 10X$ D) $10(X - 5)$

18. La suma de la mitad de un número y su recíproco es:

A) $\frac{X}{2} + \frac{1}{2}$ B) $\frac{X}{2} + \frac{1}{X}$ C) $\frac{X}{2} + 1$ D) $2 + \frac{X}{2}$

19. Los tres quintos de x aumentado en 4 es:

A) $\frac{3X}{5} + 4$ B) $\frac{5X}{3} + 4$ C) $\frac{4X}{5} + 3$ D) $\frac{3}{5}(X + 4)$

20. La diferencia de cuadrados de dos números es:

A) $X - Y$ B) $(X - Y)^2$ C) $X^2 - Y^2$ D) $(\frac{X}{Y})^2$

21. El cuadrado de la diferencia de dos números es:

A) $X^2 - Y^2$ B) $(\frac{1}{X})^2 - Y^2$ C) $(X - Y)^2$ D) $(\frac{1}{X})^2 - (\frac{1}{Y})^2$

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

22. Hallar la solución matemática de las siguientes ecuaciones:

a) $9m - 11 = -10 + 12m$
b) $X-(5X+2)=9-(4X-3)$
c) $\frac{X}{3} + \frac{X}{6} - \frac{X}{9} = 1$
d) f) $n - 5 = 3n - 20$
e) $16X-[3X-(6-9X)] = 30+[-(3X+2)-(X+3)]$
f) $-[4X+\{2x\}]=12$
g) $12-5X=15-3X$

EN LOS PROBLEMAS DEL 23 AL 25, INDICAR LA RESPUESTA CORRECTA.

23. La suma de dos números enteros pares consecutivos es 194, los números son:

a) 48 y 50 b) 94 y 96 c) 38 y 40 d) 96 y 98

24. La suma de dos números es 106 y el mayor excede al menor en 8 unidades. Los números son:

a) 40 y 47 b) 12 y 20 c) 49 y 57 d) 42 y 50

25. Entre “X” y “Y” tienen $ 1154 y “X” tiene $ 506 menos que “Y”. La cantidad que tiene cada uno es:

A) 324 y 830 B) 1154 y 506 C) 300 y 324 D) 320 y 324

Inecuaciones

26. Hallar la solución y elaborar la gráfica de las siguientes inecuaciones:

a) $5X + 2 > 3X + 8$
b) $2X^2 - 18 > 0$
c) $\frac{2}{3} + \frac{X}{2} \leq 4$
d) $2(x+3) < -x+8$
e) $4X - 8 \leq 0$
f) $10 - 2X > 0$
g) $3X - 12 \geq 0$
h) $-(3x-12) > 14-4x$

Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

27. Hallar la solución a cada uno de los siguientes ejercicios:

a) $\left| \frac{2x}{8} - 5 \right| \leq 12$
b) $| 6X + 18 | = 30$
c) $| 20 - 2X | = 10$
d) $| 4X - 5 | \leq 14$
e) $| 4x + 10 | > 3x + 6$
f) $| 8-3m | = 12$
g) $| 3x - 10 | = 28$
h) $|3b + 12| > 9$

Operaciones con polinomios

28. Sumar.

a) $6m - 3n$; $-4n+5p$; $-m-5p$
b) $X^2 + n^2$; $-3Xn+4n^2$; $56X^2 - 5n^2$
c) $Y^2 + Yb$; $-2Yb + b^2$
d) $-7X^2 + 5X - 6$; $8X - 9 + 4X2$; $-7X + 14 - X^2$
e) $X^3 - 4X + 5$: $X^3 - 2X^2 + 6$; $X^2 - 7X + 4$
f) $X^5 + X - 9$; $3X^4 - 7X^2 + 6$; $-3X^3 - 4X + 5$

29. Restar.

a) DE $X^2 - 3X$ restar $-5X +4$
b) DE $X^2 + Y^2 -3XY$ restar $-Y^2 +3X^2 -4XY$
c) Restar $- 5 m + X$ de $-7 m + 5$
d) DE $4X$ restar $-6m$
e) restar $X-Y$ de $Y-X$
d) Restar $6X^2Y -8X^3$ de $7X^2y+5XY^3$

30. Multiplicación. Hallar el resultado de:

a) $(X^3 -3X^2 Y + 4XY^2)(X^2 Y -2XY^2 -1OY^3)$ $(X^2 +Y^2 +2XY)(X + Y$
b) $(X^{m+2} - X^m +2X^{m+1})(X^{m+3} -2X^{m+1})$
c) f) $(5Y^4 +3Y^3 +4Y^2 +2Y)(Y^4 -3Y^2 -1)$
d) $(-15X^4 Y^3)(-6m^2 X^2)$
e) $(\frac{2X^2Y^3}{3})(\frac{-3m^2X^4Y}{5})$
f) $(-X^{n+1} Y^{N+2})(X^{n+2} Y^n)$

Factorización

31. Factor Común

a) $8X^2 - 12XY$
b) $10X^2-5c +15c^3$
c) $12b^2 n + 24b^3 n^2 -36b^4 n^3 + 48b^5 n^4$
d) $2m^2 X + 2mX^2 -3mX$
e) $9X^2 -12X b +15X^3b^2 -24Xb^3$
f) $12^{a2} XY^2 -36X^2 Y^4$

32. Factor común por agrupación:

a) $m (X-Y) + (X - Y)$
b) $3abX^2 - 2Y^2 - 2X^2 +3abY^2$
c) $3m - 2n - 2nX^4 + 3mX^4$
d) $3 m (X - 2) - 2n(X - Y)$
e) $X^2 + Xb + Xn + bn$
f) $m +m^2 - mY^2 - Y^2$

33. Diferencia de cuadrados

a) $25 m^2 Y^4 - 144$
b) $4 m^2 - 36 X^6$
c) $49 m^8 - 121 n^8$
d) $100Y^4X^2 - 121m^6$
e) $X^{10} - 81Y^{12}$
f) $\frac{25}{36} - X^4 Y^{12}$
g) $b^2 - m^4$
h) $9X^{2m} - Y^{2m}$
i) $X^{6m} - Y^{4a}$

34. Trinomio cuadrado perfecto

a) $X^2 - 2XY + b^2$
b) $121 + 198X^6 + 81X^{12}$
c) $9 - 6X + X^2$
d) $X^2 + 2bX + b^2$
c) $16 + 40X^2 + 25X^4$
f) $4m^2 - 12mn + 9Y^2$
g) $9Y^2 - 30X^2Y + 25X^4$
h) $\frac{X^2}{4} - Xc + c^2$

35. Trinomio de la forma, $\mathbf{X^2 + bX + c}$

a) $X^2 + 5x - 14$ c) $m^2 + 15m + 56$
b) $Y^2 + 3X - 10$ d) $12 - 8m + m^2$
c) h) $b^2 + 7b - 60$
d) $X^2 + 24X + 135$
e) $c^2 - 8c - 1008$
f) $X^2 + 6X - 16$

36. Trinomio de la forma, $\mathbf{aX^2 + bX + c}$

a) $3m^2 - 5m - 2$ c) $9X^2 + 10X + 1$
b) $5n^2 + 13n - 6$ d) $12z^2 - z - 6$
c) f) $8X^2 - 14X - 15$
d) $14b^2 - 31b - 10$
e) $20m^2 - 9m - 20$
f) $3 + 11X + 10X^2$

Sistemas de ecuaciones simultáneas

37. Encontrar la solución a los siguientes sistemas de ecuaciones

a) $Y + 6X = 27$
$7Y - 3X = 9$

b) $9m + 16n = 7$
$4m - 3n = 0$

c) $3X + 5m = -2$
$5X + 8m = -60$

d) $4X + 5Y = 5$
$-10y - 4X = -7$

Ecuación cuadrática

38. En las siguientes ecuaciones encontrar:

1. Las raíces
2. Rango
3. el vértice
4. eje de simetría
5. cortes con los ejes
6. Intervalos donde crece o decrece
7. dominio

a) $X^2 - 6X + 3$
e) $2X^2 + X + 6$

b) $X^2 + X - 12$
c) $2X^2 - X - 15$
d) $X^2 + 3X - 10$
f) $X^2 - 2X + 1$
g) $X^2 - 4X + 4$
h) $-3X^2 + 7X + 20$

Problemas

39. Si la suma de dos números es 9 y la suma de sus cuadrados 53; los números son:

a) 5 y 4 b) -7 y -2 c) 7 y 2 d) 9 y 6

40. Si la edad de A hace 6 años era la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de 6 años; la edad actual es:

a) 3 b) 10 c) 7 d) 4

41. Si el cociente de dividir 84 entre cierto número excede en 5 a ese número; el número es:

a) 7 b) 12 c) 8 e) 1

Dominio de una función

42. Hallar el dominio y el rango de las funciones siguientes:

a) $Y = \sqrt{7X - 21}$
b) $F(x) = \sqrt{X^2 - 5X + 6}$
c) $Y = X + 1$
d) $Y = \sqrt{4 + X}$
e) i) $f(x) = X^2 + 5X + 6$
f) k) $f(x) = \frac{X}{X-1}$
g) $f(x) = \log (x^2 - 16)$
h) $f(x) = \frac{2X-5}{X^2+5X+6}$
i) $Y = X^2$
j) $Y = \frac{X^2}{2} + 1$
k) $f(x) = \frac{3X+2}{2X-1}$

43. Hallar la ecuación de la recta indicada y dibujar su gráfica.

a) Pasando por (2,3) y (2,-1)

b) y-intersección en $\frac{2}{3}$ con **m** = $\frac{1}{6}$

c) Recta vertical con X-intersección 3

44. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y sea

1) paralela 2) perpendicular a la recta indicada

a) (2,1) ; 4x -2y =3

b) (-6,4) ; 3x+4y =7

c) (2,5); x = 4

d) (-1.0); y = 3

45. Cuando el precio de cierto tipo de tornillos es $500, se ofrecen 500 de ellos en el mercado; si el precio es $750 la disponibilidad de dichos tornillos es 1000. ¿Cuál es la ecuación de la oferta?

46. Se venden 20 anillos cuando su precio es de $8.000 y 40 anillos si el precio es $6.000. ¿Cuál es la ecuación de la demanda?

CAPÍTULO 3

LOGROS

Al concluir el estudio de este capítulo, el estudiante:

- Reconoce los ángulos por su medida.
- Calcula en complemento y suplemento de un ángulo.
- Diferencia las propiedades de congruencia de triángulos.
- Clasifica los ángulos según su posición.
- Identifica y aplica el Teorema de Pitágoras.
- Identifica las líneas notables de un triángulo.
- Clasifica los polígonos según el número de lados.
- Identifica las líneas de la circunferencia.
- Diferencia cada una de las funciones trigonométricas.
- Diferencia el teorema del seno y del coseno y el valor de los elementos de un triángulo dado.
- Resuelve problemas de áreas de figuras planas.

3. ELEMENTOS DE GEOMETRÍA

En geometría se emplean términos de los estudiantes tienen noción tales como recta, segmento y ángulo.

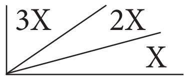
3.1 Clasificación de los ángulos

Según su medida

- Nulo. Mide 0°
- Agudo. Mide menos de 90°
- Recto. Mide 90°
- Obtuso. Mide más de 90°
- Llano. Mide 180°
- De giro o de una revolución mide 360°

Según su suma:

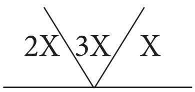
Complementarios. Son los ángulos cuya suma da como resultado 90º
Ejemplo. Calcular el valor de cada uno de los ángulos de la gráfica.



$$X + 2X + 3X = 90°$$
$$6X = 90°$$
$$X = 90°/6$$
$$X = 15°$$

$2X = 2(15°) = \mathbf{30°}$
$3X = 3(15°) = \mathbf{45°}$

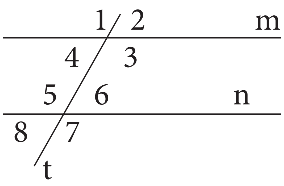
Suplementarios
Ejemplo. En la siguiente gráfica calcular el valor de cada ángulo.



$$2X + 3x + X = 180°$$
$$6X = 180°$$
$$X = (180°)/6$$
$$X = 30°$$

$X = \mathbf{30°}$
$3X = 3(30°) = \mathbf{90°}$
$2X = 2(30°) = \mathbf{60°}$

Según su posición
- Opuestos por el vértice
- Alternos internos
- Alternos externos
- Correspondientes



$m \parallel n$
t, transversal

Ángulos opuestos por el vértice. Son iguales. Ellos son:
∢ 1 *y* ∢ 3 ; ∢2 y ∢ 4 ; ∢ 5 y ∢ 7 y ; ∢ 6 y ∢ 8

Ángulos alternos internos. Los que se encuentran dentro de las paralelas, pero en diferente la de la transversal. Son iguales. **∢ 3 y ∢ 5 ; ∢ 4 y ∢ 6**

Ángulos alternos externos. Se denominan así cuando ambos ángulos son externos a las paralelas y se encuentran en diferente lado de la transversal. Son iguales. **∢ 1 y ∢ 7 ; ∢ 2 y ∢ 8**

Ángulos correspondientes. Se encuentran al mismo lado de la transversal, pero uno es interno y el otro externo. Son iguales.
∢ 1 y ∢ 5 ; ∢2 y ∢ 6 ; ∢ 3 y ∢ 7 ; ∢ 4 y ∢ 8

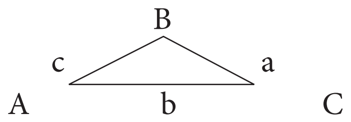
3.2 Triángulo

La reunión de tres puntos cualesquiera A, B y C, no alineados, determinan un triángulo.

Los puntos A, B y C, se llaman vértices y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, se llaman lados.

El triángulo ABC, determina tres ángulos ∢ABC, ∢ACB y ∢BAC.

La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°.



$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$$

3.2.1 Clasificación:

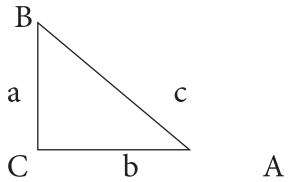
Según sus lados

- **Equilátero**, si los tres lados son iguales.
- **Escaleno,** si los tres lados son desiguales,
- **Isósceles,** si tiene dos lados iguales.
- **Rectángulo**, cuando tiene un ángulo recto

Según sus ángulos

- **Equiángulo**, si los tres ángulos son iguales
- **Acutángulo**, si los tres ángulos son agudos.
- **Obtusángulo**, si uno de sus ángulos es obtuso.

3.3 Teorema de Pitágoras



a , b, se llaman catetos.
c, se denomina hipotenusa
TEOREMA DE PITÁGORAS.
El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$

Ejemplo. Si: $a = 6$ y $b = 8$; calcular el valor de la hipotenusa.

$$h^2 = a^2 + b^2$$
$$h^2 = (6)^2 + (8)^2$$
$$h^2 = 36 + 64$$
$$h^2 = 100$$
$$\sqrt{h^2} = \sqrt{100}$$
$$h = 10$$

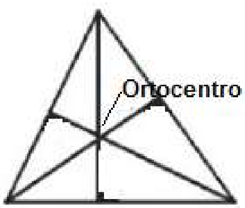
Ejemplo. Si: $a = 5$ y $h = 12$; Calcular el valor del otro cateto

$h^2 = a^2 + b^2$ Se despeja el otro

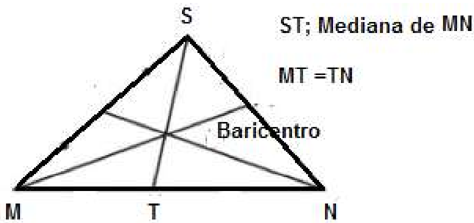
$$h^2 - a^2 = b^2$$
$$(12)^2 - (5)^2 = b^2$$
$$144 - 25 = b^2$$
$$119 = b^2$$
$$\sqrt{119} = \sqrt{b^2}$$
$$10{,}9 = b$$

3.4 Líneas notables de un triángulo

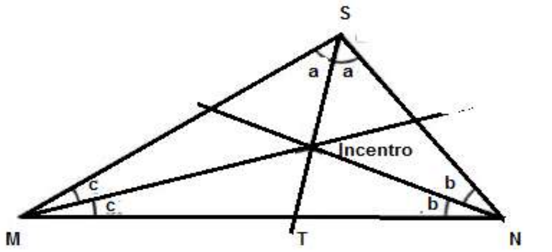
Todo triángulo tiene tres **alturas**, tres **medianas**, tres **bisectrices** y tres **mediatrices**.



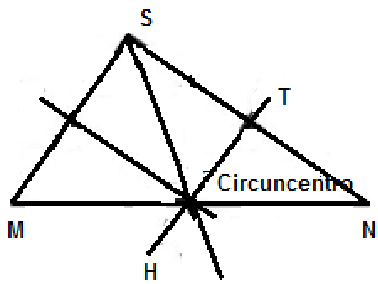
Altura, es la perpendicular trazada desde uno de los vértices al lado opuesto o a su prolongación. Las tres alturas se intersectan en un punto llamado **ORTOCENTRO**.



MEDIANA, es la línea que une el vértice con el punto medio del lado opuesto. Sus tres medianas se cortan en un punto llamado **BARICENTRO.**



BISECTRIZ, es la recta que divide a cada ángulo en dos partes iguales. Las bisectrices se cortan en el punto llamado **INCENTRO.**



TH perpendicular SN

MEDIATRIZ, son perpendiculares trazadas en los puntos medios de cada lado. El punto de corte de ellas se llama **CIRCUNCENTRO.**

3.5. Teoremas de congruencia de triángulos

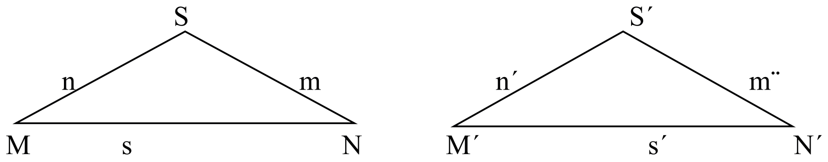
ALA. Dos triángulos son congruentes cuando tienen iguales un lado y los dos ángulos adyacentes.

LAL. Dos triángulos son congruentes cuando tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

LLL. Dos triángulos son congruentes cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales.

3.6 Semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos correspondientes iguales (**$\sphericalangle M = \sphericalangle M'$, $\sphericalangle N = \sphericalangle N'$, $\sphericalangle S = \sphericalangle S'$**) y sus lados correspondientes proporcionales.



$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle M = \measuredangle M' \\ \measuredangle N = \measuredangle N'\end{array}\right\}$$ **Ángulos homólogos e iguales**

$\measuredangle S = \measuredangle S'$

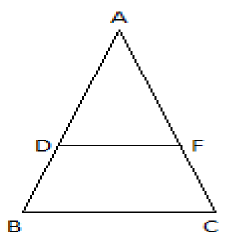
$\frac{n}{n'} = \frac{m}{m'} = \frac{s}{s'}$ **Lados homólogos proporcionales**

3.6.1. Criterios de semejanza

1° Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos iguales.
2° Dos triángulos son semejantes si tienen los lados proporcionales.
3° Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual.

3.7 Teorema de Thales

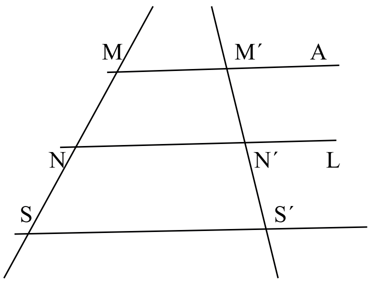
Toda recta trazada paralelamente a un lado de un triángulo, divide a los otros dos en partes directamente proporcionales.



Los triángulos **ABC** y **ADF** son semejantes
DF II BC

$$\frac{AD\ AD}{DB\ DB} = \frac{AF\ AF}{FC\ FC}$$

Si dos rectas cualesquiera son cortadas por una o varias rectas paralelas los segmentos determinados en una de las dos rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra recta.



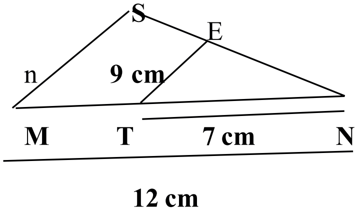
A II L II T rectas paralelas

$$\frac{MN}{M'N'} = \frac{NS}{N'S'} = \frac{MS}{M'S'}$$

Ejemplo. En el gráfico anterior MN = 16 cm, M´N´ = 12 cm; N´S´ = 5 cm. Cuál es el valor de NS?

$\frac{16}{12} = \frac{X}{5}$; se despeja X, entonces: X = $\frac{(16)(5)}{12}$ = 5,6 cm

Ejemplo. Hallar la medida de los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{SE}$, si $\overline{MS}$ II $\overline{TETE}$



MS II TE
MN =12cm TN =7cm TE = 9 cm; SM =?

$\frac{12}{7} = \frac{SM}{9}$ se despeja **SM**, y, **SM=** $\frac{(12)(9)}{7}$ **= 5,4 cm**

3.8 Polígonos

Un polígono es una figura geométrica cerrada, formada por la reunión de varios segmentos que no se cruzan y que se intersectan en los extremos.

3.8.1 Propiedades

Independientemente del número de lados que tenga el polígono, ellos satisfacen las siguientes propiedades:

1. La suma de los ángulos externos es 360°.
2. El perímetro del polígono es la suma de sus lados.
3. La suma de los ángulos internos de cualquier polígono (N lados) es (N – 2)180°.

Ejemplo. La suma de los ángulos internos de un heptágono es:

$$(7-2)180° = 5(180°) = 900°$$

Existen polígonos **regulare**s e **irregular**es. Los regulares son los que tienen sus lados iguales y los irregulares los que no tienen lados iguales.

3.8.2 Clasificación

Se clasifican según el número de lados.

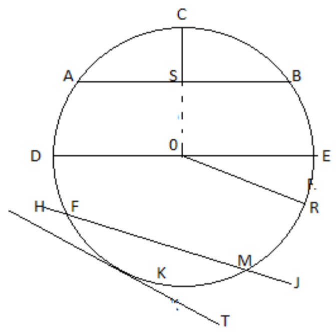
NÚMERO DE LADOS	NOMBRE
Tres	Triángulo
Cuatro	Trapecio: Escaleno Isósceles Rectangular Cuadrilátero: Rectángulo Paralelogramo Rectángulo Rombo Cuadrado
Cinco	Pentágono
Seis	Exágono
Siete	Heptágono
Ocho	Octágono
Diez	Decágono
Infinito número de lados	Círculo

3.9 Circunferencia

Es una curva cerrada y plana cuyos puntos equidistan de otro interior llamado centro.

El área interior a la circunferencia se denomina círculo.
El perímetro de un círculo es la circunferencia.

3.9.1 Líneas de la circunferencia



CENTRO. Es el punto interior y equidistante de todos los puntos de la circunferencia. Ej. **O.**
RADIO. Segmento que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia. Ej. **OR.**
CUERDA. Es el segmento que une dos puntos de la circunferencia. Ej. **AB.**
La cuerda subtiende al arco que tiene los mismos extremos, es decir, la cuerda **AB** subtiende los arcos **ACB** y **AKB.**

Diámetro. Es una cuerda que pasa por el centro. El diámetro es el doble del radio. Ej. **DE.**

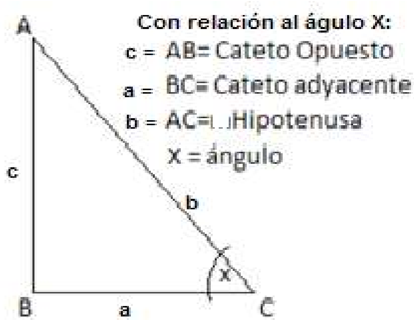
El diámetro es igual a la longitud de la circunferencia dividida entre π.

Secante. Es una recta que corta a la circunferencia en dos puntos. Ej. **HJ.**

Tangente. Es la línea recta que toca a la circunferencia en un solo punto. Ej. **T.**

Sagita. Es la perpendicular levantada en medio de una cuerda y que termina en el arco subtendido. Ej. **SC.**

3.10 Funciones trigonométricas



$$\text{Sen } X = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{Cos } X = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{b}$$

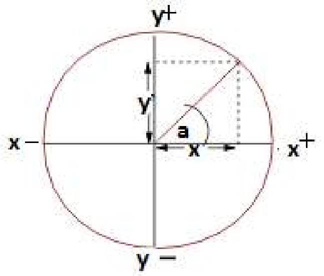
$$\text{Tan } X = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacenta}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{Cot } X = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}} = \frac{c}{a}$$

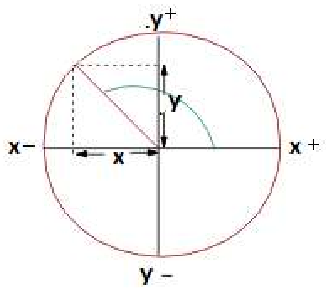
$$\text{Sec } X = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Cosc } X = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}} = \frac{b}{c}$$

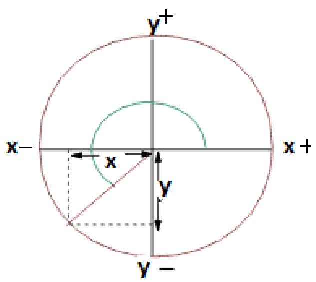
3.10.1 Signos de las funciones trigonométricas



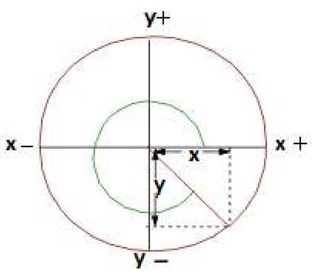
En el primer cuadrante **X**, es el cateto adyacente, **y** es el cateto opuesto; la hipotenusa es **r** el radio de la circunferencia. Como **X, y, r**, son positivas, entonces **todas** las funciones del primer cuadrante son **positivas.**



En el segundo cuadrante, el cateto adyacente es negativo mientras que el cateto opuesto es positivo. La hipotenusa es positiva en todos los cuadrantes. Por consiguiente el **Coseno**, la **Tangente** y sus inversas (**Secante** y **Cotangente**) tienen resultados **negativos.**



En el tercer cuadrante, los dos catetos, adyacente y opuesto, son negativos. En este caso la **Tangente** y su inversa (**Cotangente**) son **positivas.**



En el cuarto cuadrante, el cateto adyacente es positivo y el cateto opuesto es negativo, en este caso las funciones **positivas** son el **Coseno** y la **Secante.**

En resumen:

+ seno - coseno - tangente	+ seno + coseno + tangente
II	I
III	IV
- seno - coseno + tangente	- seno + coseno - tangente

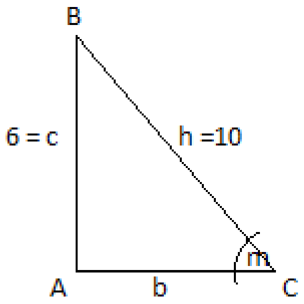
Las funciones son **POSITIVAS,** en:

Cuadrante **I, todas.**
Cuadrante **II, solo el seno**
Cuadrante **III, solo la tangente**
Cuadrante **IV, solo el coseno**

3.11 Solución de triángulos

Ejemplo. En el triángulo de la figura se conocen dos lados que miden 10 y 6.

Calcular: a) el lado b, b) seno B, el coseno de B , el seno de c y la tangente de c.



Lado c,

Se aplica Pitágoras:
$(10)^2 = (6)^2 + b^2$
$100 = 36 + b^2$
$64 = b2$
$\sqrt{64} = \sqrt{b^2}$
$8 = b$

b) Se aplican las funciones:

sen B = $\frac{8}{10}$

cos B = $\frac{6}{10}$

Tan C = $\frac{6}{8}$

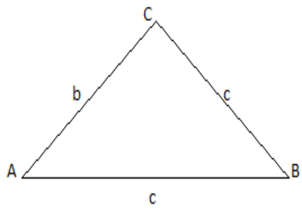
3.12 Teorema del seno y del coseno

En un triángulo cuyos ángulos son ABC y los lados opuestos a dichos ángulos son a, b y c,

Respectivamente, se tiene:

TEOREMA DEL SENO

$$\frac{Sen\ A}{a} = \frac{Sen\ B}{b} = \frac{Sen\ C}{c}$$



TEOREMA DEL COSENO

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\text{Cos } A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\text{Cos} B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\text{Cos} C$

Ejemplo. En el triángulo ABC dado anteriormente, se sabe que c =20, A =30° y B =65°. Halle los demás elementos:

Angulo C: C = 180° - (30° + 65°) = 180° - 95° = 85°

Lado a: para hallarlo se aplica ley del seno. $\frac{a}{SenA} = \frac{c}{SenC} = \frac{a}{Sen\ 30°} = \frac{20}{Sen85°}$ se despeja a, y se tiene:

$$a = \frac{Sen30°(20)}{Sen85°} = \frac{(20)(0{,}5)}{0{,}9961} = \frac{10}{0{,}9961} = 10{,}03$$

Lado b: $\frac{b}{SenB} = \frac{20}{SenC}$; despejamos b $= \frac{(20)(SenB)}{SenC} = \frac{(20)(Sen65°)}{Sen85°} = \frac{(20)(0{,}9063)}{0{,}9961} = \frac{18{,}12}{0{,}9961} = 18{,}19$

Ejemplo. Teniendo en cuenta el gráfico del triángulo anterior, se sabe que: b =10, c =20 y A=25°

Lado a: $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.Cos\ A}$

$$a^2 = (10)^2 + (20)^2 - 2\ (10)\ (20)\ .\ \text{Cos } 25°$$
$$a^2 = 100 + 400 - 400\ .\ \text{Cos } 25°$$
$$a^2 = 500 - 400\ ((0{,}9063)$$
$$a^2 = 500 - 362{,}52$$
$$a^2 = 137{,}48$$
$$a = \sqrt{137{,}48}$$
$$a = 11{,}72$$

Angulo B: $\frac{b}{Sen\ B} = \frac{a}{Sen\ A} = \frac{10}{Sen\ B} = \frac{11{,}72}{Sen\ 25°}$; se despeja Sen B

$$\frac{(10)(Sen\ 25°)}{11{,}72} = Sen\ B$$

$$\frac{(10)(0{,}4226)}{11{,}72} = Sen\ B$$

$$\frac{4{,}226}{11{,}72} = Sen\ B$$

$$0{,}3605 = Sen\ B$$

Para hallar a B, en la **calculadora**, se escribe: **shift sen^{-1} 0,3604** = y sale 21,12, luego: **B = 21,12°**

Para C:

$$A + B + C = 180°$$
$$25° + 21{,}12 + C = 180$$
$$C = 180° - (25° + 21{,}12°)$$
$$C = 180° - 46{,}12°$$
$$C = 133{,}88°$$

Ejemplo. Dados los siguientes elementos: a =125, A = 54°, B = 65°; del triángulo ABC, Calcule le valor de los demás elementos (b, c, C)

Lado c: $\frac{a}{SenA} = \frac{c}{SenC}$; $\frac{125}{Sen54°} = \frac{c}{Sen65°}$; se despeja c: $c = \frac{(125)(Sen\ 65°)}{Sen\ 54°}$

$$c = \frac{(125)(0{,}9063)}{0{,}8090}$$

$$c = 140$$

Angulo C: 54° + 65° + C = 180°

$$C = 180° - 54° - 65°$$
$$C = 61°$$

Lado b: $\frac{b}{SenB} = \frac{a}{SenA}$; $\frac{b}{Sen61°} = \frac{125}{Sen54°}$ entonces: $b = \frac{(Sen\ 61°)(125)}{Sen\ 54°}$

$$b = \frac{(0{,}8746)(125)}{0{,}8090}$$

$$b = 135$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN DEL CAPÍTULO

Las figuras siguientes corresponden a las preguntas números 1. 2 y 3

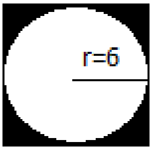


fig.N°1

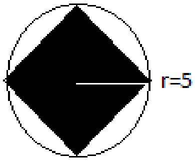


fig N°2

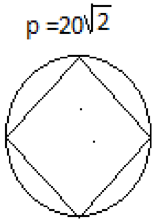


fig N°3

1. Se tiene una circunferencia de radio 6cm, inscrita en un cuadrado fig, N°1, el área de la parte sombreada es:

A) 31cm^2 B) 70 m^2 C) 144 cm^2 D) 113 cm^2

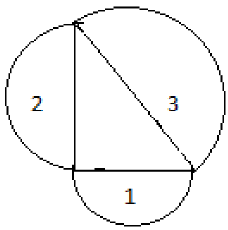
2. La circunferencia de radio 5cm, tiene inscrito un cuadrado, fig N°2. El área de dicho cuadrado es:

A) 50 cm^2 B) 49 cm^2 C) 7 cm^2 D) 47,2

3. El perímetro de un cuadrado inscrito en una circunferencia es $20\sqrt{2}$, luego el diámetro de la circunferencia es:

A) $2\sqrt{5}$ B) $20\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{2}$ D) $10\sqrt{2}$

4. El triángulo de la gráfica siguiente es rectángulo y sobre sus lados se han construido semicírculos. Si las áreas de los semicírculos 1 y 2 son $\frac{9\pi}{2}$ y 8π cm^2 , respectivamente, el diámetro del semicírculo 3, es:



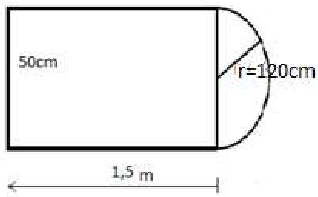
A) $2\sqrt{5}$ cm

B) $5\sqrt{2}$ cm

C) $4\sqrt{2}$ cm

D) $\frac{6}{\sqrt{2}}$ cm

5. En la sala de una vivienda hay un ventanal como se muestra en la figura, su área es:



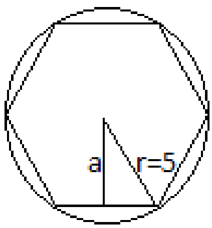
A) 1,27 m^2

B) 7,57 m^2

C) 5,27 m^2

D) 4,57 m^2

6. La siguiente figura se utiliza para responder el problema n°6 y n°7



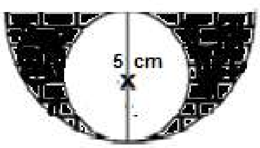
6. El área del hexágono inscrito en la circunferencia de 5cm de radio es:

A) 72,5 cm^2 B)30,5 cm^2
C) 144,5 cm^2 D) 64,5 cm^2

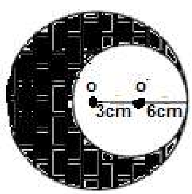
7. El perímetro del hexágono inscrito en la circunferencia de 5cm de radio es:

A) 72 cm B)30 cm
C) 144 cm D) 4,8 cm

7. Las figuras siguientes corresponden a los problemas n°8 y n°9



Problema N°9



Problema N° 8

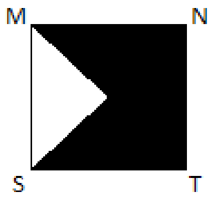
8. El área y el perímetro de la parte sombreada del problema N° 8, es:

A) 254,3 y 56,5 B) 113,0 Y 37,6 C) 141,3 Y 94,2 D) 367,3 Y 18,1

9. El perímetro de la parte sombreada del problema N° 9 es:

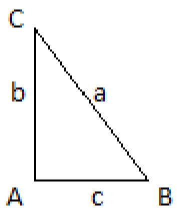
A) 384 B) 43,9 C) 21,9 D) 57,8

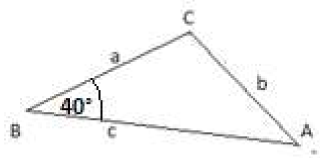
10. El área del cuadrado MNT S es 60 m^2, entonces el área de la parte sombreada es:



A) 30 m^2
B) 24 m^2
C) 15 m^2
D) 20 m^2

Gráficos para la solución de los problemas n° 11, 12, 13 Y 14





11. Del triángulo rectángulo B AC, fig. de la izquierda, son conocidos b = 10 m , c = 12, entonces el valor de **a** es:

A) 15,6 B) 10 C) 14 D)24

12. En el triángulo de la izquierda (BAC), se conoce a = 30 m , b = 18 m; el valor de c es:

A) 12 B) 48 C) 20 D) 24

13. En el triángulo ABC de la figura de la derecha, se conoce b = 15m, $\hat{B}$ = 40° y c = 20; entonces el valor de $\hat{C}$, $\hat{A}$, c y b es:

A) a = 13, A = 33,6 C = 106,4
C) a = 16 A = 30 C = 37
B) a = 30 A = 55 C = 60
D) a = 12 A = 34 C = 100

14. En el triángulo de la derecha se sabe que b = 12, c = 18 y $\hat{A}$ = 60°, luego el valor de $\hat{B}$, $\hat{C}$ y el lado a es:

A) 30,7°, 70,3° y 14,8 B) 40,7°, 79,3 y 15,8 C) 44,1°, 75,9° y 15,8
D)35°, 40° y 15,8

15. El volumen de un cubo de 3,5cm de lado es:

A) 42,8 cm B) 12,2 cm C) 24,8 cm D) 21,2 cm

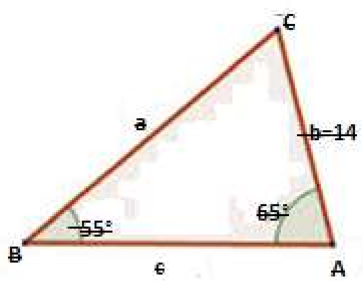
16. Una caja de lata tiene 1,2 m de largo, 80 cm de ancho y 10 dm de profundidad, la capacidad en litros es:

A) 0,96 litros B) 96 litros C) 960 litros D) 9.600 litros

17. Un terreno de forma triangular mide 18 metros en el lado mayor, ocho (8) metros en un segundo lado y 60° en el ángulo que forman ambos lados. El perímetro del terreno mide:

A) 15,6 m B) 416 m C) 41,6 m D) 26 m

18. Calcula los lados y el ángulo desconocido en la siguiente gráfica.



19. En un triángulo rectángulo SMN, se sabe que n = 3metros; m = 5 metros. Calcular los demás elementos del triángulo.

20. Un edificio de 40 metros de alto proyecta una sombra de 50 metros de larga. Calcular el ángulo que forma un rayo de luz con el suelo y que pasa por la cima del edificio.

CAPÍTULO 4

LOGROS

- Al finalizar el estudio de este capítulo, el estudiante:
- Identifica y desarrolla con precisión conversiones con medidas de longitud.
- Identifica y desarrolla con precisión conversiones con medidas de área.
- Identifica y desarrolla con precisión conversiones con medidas de volumen.
- Identifica y desarrolla con precisión conversiones con medidas de capacidad.
- Identifica y desarrolla con precisión conversiones con medidas de peso.
- Resuelve problemas de aplicación del sistema métrico decimal a figuras geométricas.

4. SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

Anteriormente, cada país o cada región tenían su propia unidad de medida, lo que dificultaba el comercio; para dar solución a dicha dificultad la Academia de Ciencias de París propuso el Sistema Métrico Decimal, que es un sistema de unidades basado en el metro con múltiplos y submúltiplos de la unidad de medida, relacionados entre sí por múltiplos y submúltiplos de 10.

4.1 Medidas de longitud

La unidad de las medidas de longitud es el metro. Las unidades de longitud varían de 10 en 10, es decir debajo de cada unidad admite solo una cifra. La escala es:

Mm	Km	Hm	Dm	m	dm	cm	mm

Ejemplo. **Reducir 3,86 Hm a cm**

Mm	Km	Hm	Dm	m	dm	cm	mm
		3,	8	6			

Se ubica el 3,86 Hm la coma debajo de Hm 8 debajo de Dm y 6 debajo de m se tacha la coma y se pasa a cm. La coma corrió hacia la derecha significa que se multiplicó, luego:

3,86 Hm = 38600 cm

Mm	Km	Hm	Dm	m	dm	cm	mm
		3	8	6	0	0	

Ejemplo. Reducir 4,9 m a km

Mm	Km	Hm	Dm	m	dm	cm	mm
				4,	9		

En este caso la coma corre a la izquierda, lo que quiere decir que se dividió.

Mm	Km	Hm	Dm	m	dm	cm	mm
	0,	0	0	4	9		

4.2 Medidas de superficie

La unidad de las medidas de Superficie es el metro cuadrado. Las unidades de longitud varían de 100 en 100. Debajo de cada unidad admite dos cifras. La escala es:

Mm^2	Km^2	Hm^2	Dm^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

Reducir 123,4 Hm^2 a m^2:

Mm^2	Km^2	Hm^2	Dm^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
	1	23,	4				

En este caso se corre la coma hacia la derecha (multiplica) y se completó las dos cifras debajo de cada unidad.

Mm^2	Km^2	Hm^2	Dm^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
	1	23	40	00			

Reducir 1,35 dm^2 a Hm^2:

Mm^2	Km^2	Hm^2	Dm^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
					1,	35	

En este caso se corre la coma hacia la izquierda (divide) y se completó las dos cifras debajo de cada unidad.

Mm^2	Km^2	Hm^2	Dm^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
		0,	00	00	01	35	

4.3 Medidas de volumen

La unidad de las medidas de VOLUMEN es el metro cúbico. Las unidades de volumen varían de 1000 en 1000. Debajo de cada unidad admite tres cifras. La escala es:

Mm^3	Km^3	Hm^3	Dm^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3

Ejemplo. Reducir 2,8 Km^3 a m^3:

Mm^3	Km^3	Hm^3	Dm^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
	2,	8					

En este caso la coma se corre hacia la derecha (multiplica) y se completó las tres cifras debajo de cada unidad.

Mm^3	Km^3	Hm^3	Dm^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
	2	800	000	000			

Reducir 3,25 Dm^3 a Km^3:

Mm^3	Km^3	Hm^3	Dm^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
			3,	25			

En este caso se corrió la coma hacia la izquierda (dividió) y se completó las tres cifras debajo de cada unidad.

Mm^3	Km^3	Hm^3	Dm^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
	0,	000	300	250			

4.4 Medidas de capacidad

La unidad de las medidas de capacidad es el litro. Las unidades de capacidad varían de 10 en 10. Debajo de cada unidad admite solo una cifra. La escala es:

Ml	Kl	Hl	Dl	l	dl	cl	Ml

Ejemplo. **Reducir 4,98 Dl a cl:**

Ml	Kl	Hl	Dl	l	dl	cl	ml
			4,	9	8		

Se ubica el 4,98 con la coma debajo de Dl, 9 debajo de l y 8 debajo de dl se tacha la coma y se pasa a cl y se completa con 0. La coma corrió hacia la derecha significa que se multiplicó, luego 4,98 Dl = 4980 cl

Ml	Kl	Hl	Dl	l	dl	cl	ml
			4	9	8	0	

Ejemplo. **Reducir 9,7l a Hl**

Ml	Kl	Hl	Dl	l	dl	cl	ml
				9,	7		

En este caso la coma corre a la izquierda lo que quiere decir que se dividió.

Ml	Kl	Hl	Dl	l	dl	cl	ml
		0,	4	9	8		

4.5 Medidas de peso

La unidad de las medidas de peso es el gramo. Las unidades de peso varían de 10 en 10. Debajo de cada unidad admite solo una cifra. La escala es:

Mg	Kg	Hg	Dg	g	dg	cg	mg

Ejemplo. Reducir 9,48 Hg a dg:

Mg	Kg	Hg	Dg	g	dg	cg	mg
		9,	4	8			

Se ubica el 9,48 con la coma debajo de Hg, 4 debajo de Dg y 8 debajo de g se tacha la coma y se pasa a dg, se completa con 0. La coma corrió hacia la derecha significa que se multiplicó, luego 9,48Hg = 9480dg

Mg	Kg	Hg	Dg	g	dg	cg	mg
		9	4	8	0		

Ejemplo. Reducir 14,7 dg a Dg

Mg	Kg	Hg	Dg	g	dg	cg	mg
				1	4,	7	

En este caso la coma corre a la izquierda lo que quiere decir que se dividió.

Luego, 14,7 dg = 0,147 Dg

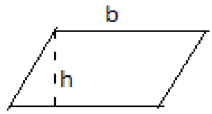
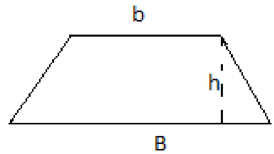
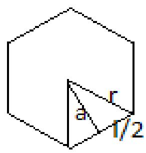
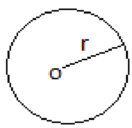
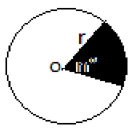
Mg	Kg	Hg	Dg	g	dg	cg	mg
			0,	1	4	7	

Nota: Existe una correspondencia entre las unidades de **volumen** y las de **capacidad** para poder hacer conversiones: **1 litro equivale a 1 dm^3**

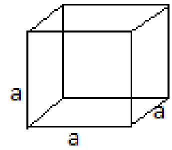
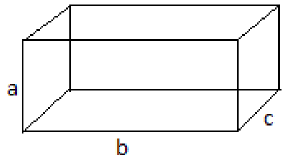
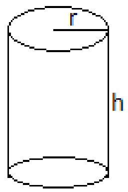
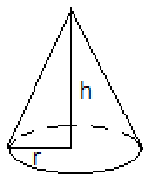
Ejercicios

9. Usted sale día por medio (lunes, miércoles, viernes y domingo) a entrenar y recorre 12 Km, 6 Hm, 2 Dm y 5 m. ¿Cuántos Hm recorre en la semana?
10. Una volqueta carga 6 m^3 de tierra. Si tiene que transportar 18 Hm^3 de tierra para relleno, desde la cantera hasta la obra; ¿cuántos viajes debe hacer?
11. Cuántas botellas de 1200 cm^3 se necesitan para envasar 180 litros de agua?
12. Un cultivador ha vendido 500 Hg y 200 Dg de frijol a $5000 el kilo. Si para cultivarlos se gastó $60000; ¿Cuánto fue el beneficio?
13. Un camión cargado de naranjas pesa 12380 Kg. Después de descargar las naranjas pesa 3500 Hg. ¿Cuántos kilogramos pesan las naranjas?

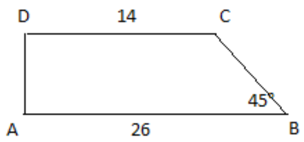
4.6 Área de figuras geométricas

NOMBRE	FÓRMULA	GRÁFICA
Triángulo	$A = \frac{b.h}{2}$	
Cuadrado	$A = l.l = l^2$	
Rectángulo	$A = l \,.\, a = b \,.\, h$	
Paralelograma		
Trapecio	$A = \frac{(B+b)h}{2}$	
Polígono Regular	$A = \frac{p*a}{2}$ **p= perímetro** **a= apotema**	
NOMBRE	**FÓRMULA**	**GRÁFICA**
Círculo	$A = \pi . r^2$	
Sector circular	$A = \frac{n*}{360°} * \pi * r^2$	

4.7 Volumen de Sólidos

NOMBRE	FÓRMULA	GRÁFICA
Cubo	$\mathbf{V = a.\ a.\ a = a^3}$	
Paralelepípedo	$V = l * a * h$	
Cilindro	$\mathbf{V = \pi . r^2 * h}$	
Cono	$\mathbf{V = \frac{\pi}{3} * r^2 * h}$	
Esfera	$\mathbf{V = \frac{4\pi}{3} * r^3}$	

EJERCICIOS DE APLICACIÓN DEL CAPÍTULO



fig,N°1

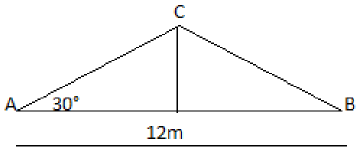


fig.N°2

1. Las bases del trapecio rectángulo, de la izquierda (fig. N°1), son 26 m y 1400 cm y el ángulo B = 45°, luego su altura es:

A) 12,1 m B) 11,61 m C) 17.1 m D) 4,3 m

2. En el triángulo isósceles de la derecha (fig,N°2), la base mide 12 m y el ángulo A = 30°, entonces su altura es:

A) 8 m B) 3,4 m C) 14,4 m D) 12 m

3. En un hexágono regular el perímetro mide 120 m, su apotema es:

A) $10\sqrt{3}$ m B) $5\sqrt{3}$ m C) $2\sqrt{3}$ m D) $10\sqrt{5}$ m

4. En un triángulo su base es 15 m y la altura los 6/5 de la misma, su altura es:

A) 15 m B) 18 m C)9 m D) 10 m

5. Si la apotema de un hexágono regular es 3 m, entonces su perímetro es:

A) $8\sqrt{72}$ B) $\sqrt{27}$ C)$12\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{27}$

6. En un trapecio se sabe que tiene 700m^2 de área; los lados paralelos miden 300dm y 40m; luego su altura es:

A) 70 m B) 40 m C)14 m D) 20 m

7. Un aljibe tiene 12 m de largo, 25 m de alto y 75 cm de ancho; su capacidad en hectolitros es:

A) 22,5 Hl B) 2,25 Hl C) 2250 Hl D) 225 Hl

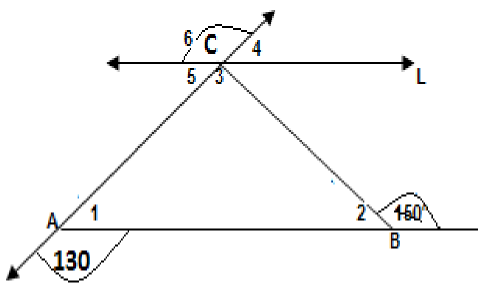
8. EL área de la base de una pirámide es 25 m^2 y su altura es 720 cm, luego su volumen es:

A) 25 m^3 B) 7,2 m^3 C) 180 m^3 D) 18 m^3

9. La altura de una pirámide cuya base es un triángulo equilátero, es de 2 m y el lado de la base mide 1000 cm, luego su volumen es:

A) $25\sqrt{3}$ m^3 B) $50\sqrt{3}$ m^3 C) $10\sqrt{5}$ m^3 D) $8\sqrt{5}$ m^3

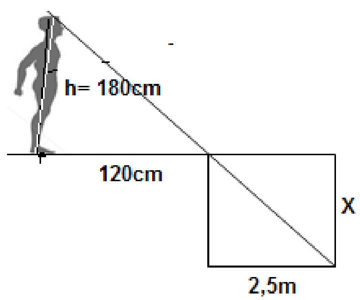
10.



En la figura L // AB. El valor de las medias de los ángulos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6 es:

A) 50°, 30°, 100°, 50°, 50° y 130°
B) 30°, 130°, 50°, 130°, 30° y 130°
C) 130°, 130°, 50°, 50°, 50° y 30°
D) 50°, 50°, 50°, 130°, 30° y 130°

11.



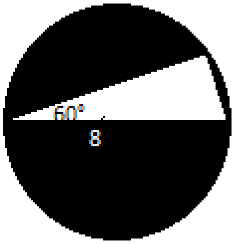
Una piscina tiene 2,5m de ancho, si un bañista situado a 120cm del borde; observa que la visual une el borde de la piscina con la línea de fondo. La profundidad de la piscina es:

A) 3,57 m
B) 4,5 m
C) 3 m
D) 3,75 m

12. El volumen de una pirámide triangular regular que tiene 2,5 m de alto, y el lado de la base tiene 160 cm, es:

A) 1,1 m^3 B) 1,38 m^3 C) 27,5 m^3 D) 2,6 m^3

13.



La figura siguiente muestra un triángulo inscrito en un semicírculo de diámetro 8 cm, el área de la parte sombreada es:

A) 58,5 cm^2
B) 41,9 cm^2
C) 66,3 cm^2
D) 50,2 cm^2

CAPÍTULO 5

LOGROS

- Al finalizar el estudio de este capítulo, el estudiante:
- Diferencia los diferentes términos estadísticos.
- Identifica los diferentes tipos de variables.
- Recolecta y ordena datos.
- Representa e interpreta datos estadísticos.
- Diferencia entre permutación, variación y combinación.
- Calcula la media, mediana y moda de datos estadísticos.
- Calcula la probabilidad de sucesos sencillos.
- Identifica los diferentes tipos de probabilidad.

5. ESTADÍSTICA

Es la ciencia que permite recolectar, organizar, resumir, tabular y analizar datos para sacar conclusiones y tomar decisiones lógicas.

5.1 Términos estadísticos

Población. Conjunto de elementos sobre los cuales se desea información o se dirige una investigación y hacia los cuales se extenderán las conclusiones.

Muestra. Es una parte de la población objetivo, en la cual se recoge la información necesaria para tomar una decisión válida relativa a la población estudio.

Parámetro. Son las características que describen numéricamente el comportamiento de una población, tales como la media y la varianza poblacionales.

Estadígrafo. Son las características que describen numéricamente el comportamiento de una muestra, tales como la media y la varianza muestral.

Variable. Se trata de una característica observable que puede adoptar diferentes valores.

Pueden ser:
Cualitativas, son de carácter cualitativo. Ejemplo. El sexo, la profesión, Equipo de futbol

Cuantitativas, son de carácter cuantitativo. Ejemplo. La talla, el peso, los ingresos, etc.

Frecuencia Absoluta $f_{(i)}$. Es el número de veces que se repite un dato

Frecuencia relativa $f_{(ri)}$. Es la relación porcentual entre la frecuencia absoluta y el total de datos.

Frecuencia Acumulada relativa $f_{(ari)}$. Es la relación porcentual entre la frecuencia acumulada y el total de datos.

5.2 Tablas de distribución de frecuencias

Es una tabla de datos en valor absoluto, de menor a mayor, de mayor a menor, en porcentaje, etc.

5.2.1 Variable cualitativa

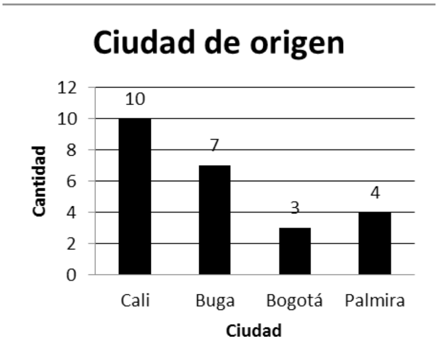
Ejemplo. Ciudad de origen. Elaborar: a) la tabla de distribución de frecuencias y b) los gráficos

Cali	Buga	Bogotá	Cali	Buga	Cali
Buga	Palmira	Cali	Palmira	Cali	Buga
Cali	Palmira	Bogotá	Cali	Cali	Buga
Cali	Buga	Bogotá	Cali	Buga	Palmira

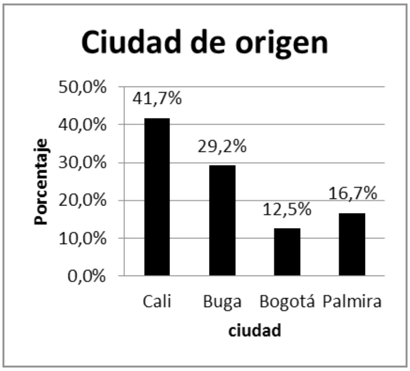
Tabla de distribución de frecuencias y gráficos

Variable	Frecuencia Absoluta (fi)	Frecuencia relativa $fri=\frac{fi}{n}*100\%$	Angulo
Cali	10	41,7%	$\frac{(360)(10)}{24}$ =150°
Buga	7	29,2%	$\frac{(360)(7)}{24}$ = 105°
Bogotá	3	12,5%	$\frac{(360)(3)}{24}$ = 45°
Palmira	4	16,7%	$\frac{(360)(4)}{24}$ = 60°
Total	24	100,0%	

N°1 Gráfico circular



N°2 Frecuencia absoluta (Barra simple)



N°3 Frecuencia relativa (Barra porcentual)

5.2.2 Variable discreta

Ejemplo. Número de hermanos en cada familia

Tabla de distribución de frecuencias. En esta variable se construyen los mismos gráficos anteriores.

N° hermanos	frecuencia absoluta(fi)	frecuencia relativa (fri)	frecuencia acumulada (fai)	Frecuencia acumulada relativa (fari)=$\frac{fai}{n}$*100%
0	5	20%	5	20%
1	8	32%	13	52%
2	4	16%	17	68%
3	2	8%	19	76%
4	6	24%	25	100%
total	25	100%		

n: **Total de datos** o tamaño de la muestra.
fi: **Frecuencia absoluta**. Las veces que se repite un dato.
fai: Frecuencia acumulada
fari: Frecuencia Acumulada relativa

fri = $\frac{fi}{n}$ **o** **fri** = $\frac{fi}{n}$ ***100%**

fari = $\frac{fai}{n}$ **o** **fari** = $\frac{fai}{n}$ *** 100%**

5.2.3 Variable continúa

Ejemplo. Los siguientes datos representan los tiempos de espera de una determinada ruta de un bus urbano, en una de las estaciones de pare. Con dichos datos elaborar:

a) La tabla de distribución de frecuencias,
b Construir el histograma, polígono y Ojiva.

14,6	13,2	18,0	27,5	23,8	17,5	23,4	21,9	14,2	29,1
30,0	18,3	15,4	16,6	20,4	17,1	25,9	22,2	23,4	15,7

n = 20

Población: Los tiempos de espera de todas las rutas.
Muestra: Los 20 tiempos de espera de la ruta escogida.
Variable de estudio: Veinte tiempos de espera. Variable cuantitativa Continua.

Solución: Para elaborar la tabla se procede así:

1. Se halla el Rango o Recorrido $\mathbf{R_m = X^> - X^<}$
   R = 30 – 13,2 = 16,8

2. Se calcula el número de intervalos de clase. **K = 1 + 3,3*log (n)**
   K = 1 + 3,3* log (20)
   K = 1 + 3,3 (1,3)
   K = 1 + 4,29
   K = 5,29 siempre se aproxima al número entero inmediatamente superior,
   $K \equiv 6$

3. Se halla la longitud de clase. $\mathbf{C = \frac{Rm}{k}}$

$C = \frac{16,8}{6} = 2,8$ siempre se aproxima al número entero inmediatamente superior,

$C \equiv 3$

4. **Límite inferior del primer intervalo ($l_1^<$)**. Este límite corresponde al número menor de los datos. Los límites inferiores de las siguientes clases, se hallan sumando en forma vertical, el valor de la longitud de clase C=3.

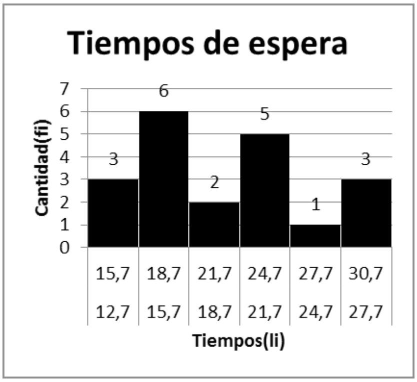
   El primer límite superior de la primera clase resulta de restar uno (1) al límite inferior de la segunda clase.

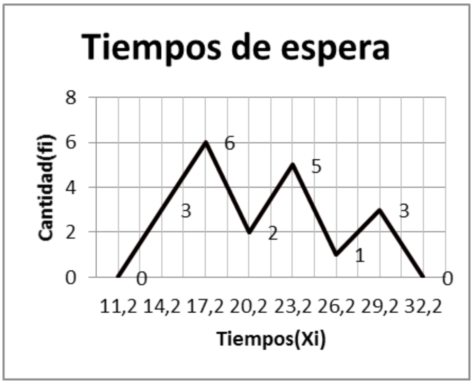
5. **Los límites reales resultan de restar 0,5** al límite inferior y sumar 0,5 al límite superior.

$l^<$	$l^>$	$l'^<$	$l'^>$	fi	fri	fai	fari	Xi
13,2	15,2	12,7	15,7	3	15%	3	15%	14,2
16,2	18,2	15,7	18,7	6	30%	9	45%	17,2
19,2	21,2	18,7	21,7	2	10%	11	55%	20,2
22,2	24,2	21,7	24,7	5	25%	16	80%	23,2
25,2	27,2	24,7	27,7	1	5%	17	85%	26,2
28,2	30,2	27,7	30,7	3	15%	20	100%	29,2

5.3 Gráficos

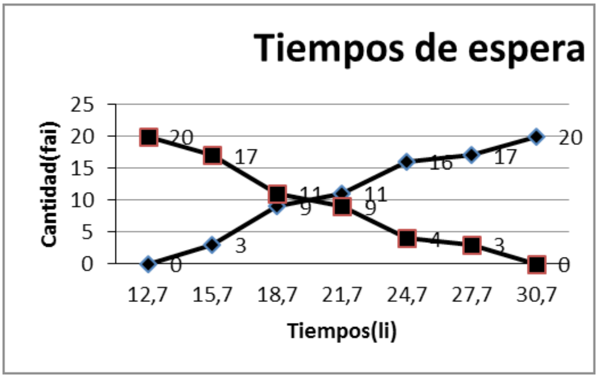
a) Histograma de fi
b) Polígono de fi





c) Ojiva

Tabla para la ojiva



límites	fai<	fai>
12,7	0	20
15,7	3	17
18,7	9	11
21,7	11	9
24,7	16	4
27,7	17	3
30,7	20	0

5.4 Medidas de centralización

5.4.1 Media aritmética

Es la suma de una cantidad de datos dividida para el total de datos.

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{n}$$

Ejemplo. La edad de 6 niños: 5 años, 12 años, 8 años, 10 años, 9 años y 7 años. ¿Cuál es edad promedio?

$$\bar{X} = \frac{5+12+8+10+9+7}{6} = \frac{51}{6} = 8{,}5 \text{ años}$$

5.4.2 Mediana (M_e).

En un conjunto de datos ordenados, la mediana es el dato central de dicho conjunto.

Ejemplo. Calcular la mediana en los siguientes pesos corporales: 28 kg, 22 kg, 14 kg, 10 kg, 18 kg

Se ordenan los datos: 10 kg, 14 kg, 18 kg, 22 kg, 28 kg
Como el número de datos es impar, la MEDIANA ES: 18 Kg

Si el número de datos es Par: 28kg, 22kg, 14kg, 10kg, 18kg y 25kg, entones:
Se ordenan los datos: 10kg, 14kg, 18kg, 22kg, 25kg, 28kg, y se calcula hallando la semisuma de los datos centrales.

$$M_e = \frac{18+22}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ kg}$$

5.4.3 Moda.

La moda en un conjunto de datos es el dato que más se repite, es decir, el que tiene mayor frecuencia.

Ejemplo calcular la moda en:

A) 3, 6, 2, 3, 5, 7, 3, 8, 3, 6.
La moda es el tres (3), por tiene mayor frecuencia.
Como tiene una sola moda se dice que es **UNIMODAL.**

B) 8, 4, 6, 4, 4, 8, 9, 7, 8, 6
La moda es el cuatro (4) y el ocho (8), por son los que tienen mayor frecuencia.
Como tiene dos modas se dice que es **BIMODAL**.
Puede ser **TRIMODAL**, si tiene tres modas o **POLIMODAL** si tiene varias modas.

C) 12, 23, 10, 18, 14, 15, 20. No tiene moda porque ningún dato se repite. En este caso se dice que es AMODAL.

5.5 Medidas de dispersión

La dispersión hace referencia a la variabilidad o dispersión de los datos con respecto a otro que se toma como referencia y que puede ser la media.

Con el propósito de medir la dispersión o variabilidad, a continuación se verán algunas medidas de dispersión.

5.5.1 Rango o recorrido

Se define como la diferencia entre el dato mayor y el dato menor de un conjunto de observaciones.

Rango = Dato mayor – Dato menor $\mathbf{R = X^{>} - X^{<}}$

Ejemplo. Supóngase que en una clínica la temperatura de un paciente se mide cuatro veces al día: 38°, 40°, 37° y 36°. El rango (amplitud) de la temperatura del paciente es:

$$R = 40° - 36° = 4°$$

5.5.2 Varianza (σ^2)

Es la que indica la variabilidad o dispersión de un conjunto de datos con respecto a su media.

La varianza siempre es positiva, se expresa en unidades cuadráticas de la unidad de medida de los datos.

Se define como el promedio de los cuadrados de las desviaciones de los datos respecto a la media.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(X1 - \bar{X})^2}{n}$$

Ejemplo. El peso en kilogramos de cuatro paquetes es 5kg, 12kg, 18kg y 9kg. Con dicha información calcular la varianza de la población de paquetes.

Se calcula la media de los pesos en Kg.: $\bar{X} = \frac{5+12+18+9}{4} = \frac{44}{4} = 11\text{kg}$

Se calcula la varianza: $$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4}(5-11)^2+(12-11)^2+(18-11)^2+(9-11)^2}{4}$$

$$\sigma^2 = \frac{36+1+49+4}{4} = \frac{110}{4} = 27{,}5$$

El resultado es la dispersión de los pesos (kg) en términos de varianza es 27,5

5.5.3 Desviación estándar o desviación típica (σ)

Se define como la raíz cuadrada de la varianza. $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Ejemplo. Empleando los datos de ejemplo anterior se tiene: $\sigma = \sqrt{27{,}5} = 5{,}2$

Este resultado es la desviación promedio de los pesos en kilogramos respecto a la media

5.6 Percentiles

Son noventa y nueve valores y son los que dividen a los datos ordenados en cien partes de igual número de datos. A estos se la valores de 1%, 2%, #%,……..99% de los datos y permiten encontrar el valor de la población ubicado en determinado porcentaje.

5.7 Teoría de contar

Notación Factorial. Se simboliza, así: n! = n(n-1)(n-2)(n-3)…..(1)
Donde, $n \geq 2$; $n \in Z^+$
0! =1 y 1! = 1

Ejemplo. Hallar las factoriales de:
3! = 3 x 2 x 1 = 6
6! = 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 720
4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24

5.7.1 Permutaciones

Permiten calcular las posibles formas de permutar todos los elementos dados.
$\mathbf{P_n = n!}$

Ejemplo. ¿Cuántas permutaciones son posibles realizar con las letras M, P y Q?

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Ejemplo. ¿De cuántas formas es posible entregar 5 pantalonetas a 5 niños?

$${}_5P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

5.7.2 Permutaciones con repetición

Calcula el número de permutaciones cuando hay elementos repetidos.

$$\mathbf{P}_{r\,(r1,\ r2,\ r3.)} = \frac{n!}{r1!\,.\,r2!\,.\,r3!}$$

Ejemplo. ¿De cuántas maneras es posible permutar las letras de la palabra ARACATACA?

$$P_{9(\,5,\,1,\,2,\,1)} = \frac{9!}{5!.1!.2!.1!} = \frac{362880}{(120)(1)(2)(1)} = \frac{362880}{240} = 1512$$

5.7.3 Variaciones

$${}_r\mathbf{P}_n = \mathbf{V}^n{}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo. ¿De cuántas formas será posible repartir 5 camisetas entre 3 niños?

$${}_3P_5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2!} = \frac{120}{2} = 60$$

5.7.4 Combinaciones

Se simbolizan con: $\;{}_n\mathbf{C}_m = \mathbf{C}^m{}_n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!(n)!}$

Ejemplo, calcular:

a) $\binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)!(3)!} = \frac{8!}{5!.\ 3!} = \frac{40320}{(120)(6)} = \frac{40320}{720} = 56$

b) $\binom{5}{5} = \frac{5!}{(5-5)!(5)!} = \frac{5!}{0!.\ 5!} = \frac{5!}{5!} = 1$

c) $\binom{7}{1} = \frac{7!}{(7-1)!(1)!} = \frac{7!}{6!.\ 1!} = \frac{5040}{720} = 7$

d) $\binom{6}{0} = \frac{6!}{(6-0)!(0)!} = \frac{6!}{6!.\ 0!} = \frac{6!}{6!} = 1$

5.8 Probabilidad

Representa la posibilidad de que un evento ocurra. Su valor esta entre 0 y 1, inclusive.

$$P = \frac{\textit{Número de exitos}}{\textit{Total de resultados posibles}}$$

Ejemplo. Hay 20 bolas en una urna:

COLOR	CANTIDAD
Verde	5
Naranja	8
Azul	3
Rojo	4
Total	20 bolas

Las bolas se mezclan y se selecciona una. Obtenga la probabilidad de que la que se saque sea:

a) Verde. $p = \frac{5}{20} = 0{,}25 \equiv 25\%$

b) Azul o Verde. $p(A \text{ o } V) = \frac{8}{20} = 0{,}4 \equiv 40\%$

c) Amarillo. $P = \frac{4}{20} = 0{,}20 \equiv 20\%$

5.8.1 Tipos de probabilidad

Ejemplo. Los trabajadores de PRODECON S.A.S., se clasifican según la siguiente tabla:

ÁREAS	SEXO		TOTAL
	MASCULINO	FEMENINO	
ADMINISTRACIÓN	10	15	25
DISEÑO	15	20	35
CONTABILIDAD	9	20	29
RECURSOS HUMANOS	6	25	31
TOTAL	**40**	**80**	**120**

Probabilidad simple. Cuando interviene un evento.

Ejemplo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado sea del departamento de DISEÑO?

$$P(D) = \frac{35}{120} = 0{,}291 \equiv 29{,}1\%$$

Ejemplo. $p(F) = \frac{80}{120} = 0{,}666 \equiv 66{,}6\%$

Probabilidad Conjunta. Cuando intervienen dos o más eventos.
Ejemplo. Calcular la probabilidad de que un empleado sea del Departamento de DISEÑO y sea HOMBRE

$$p(D \text{ y } H) = p(D \cap H) = \frac{15}{120} = 0{,}125 \equiv 12{,}5\%$$

Ejemplo. $p(F \text{ y } R) = p(F \cap R) = \frac{25}{120} = 0{,}208 = 20{,}8\%$

Probabilidad condicional

$$\textbf{En general:}\quad p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Ejemplo. Calcular la probabilidad de que un empleado sea del departamento de CONTABILIDAD, si, es MASCULINO.

$$p(C|M) = \frac{p(C \cap M)}{p(M)} = \frac{\frac{9}{120}}{\frac{40}{120}} = \frac{(9)(120)}{(120)(40)} = \frac{9}{40} = 0{,}225 = 22{,}5\%$$

Suma de probabilidades

a. Cuando los eventos son excluyentes, es decir, no tienen elementos en común.

$$\mathbf{P(A \text{ o } B) = p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$$

Ejemplo. Calcular la probabilidad de que un empleado sea de sexo MASCULINO o de sexo FEMENINO.

$$P(M \text{ o } F) = p(M \cup F) = p(M) + p(F) = \frac{40}{120} + \frac{80}{120} = \frac{120}{120} = 1 \equiv 100\%$$

Ejemplo. $P(D \text{ o } R) = p(D \cup R) = p(D) + p(R) = \frac{35}{120} + \frac{31}{120} = \frac{66}{120} = 0{,}55 \equiv 55\%$

b. Cuando los eventos NO son excluyentes, es decir, tienen elementos en común.

$$\mathbf{P(A \text{ o } B) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

Ejemplo. Calcular la probabilidad de que un empleado sea de sexo MASCULINO o del departamento de Contabilidad.

P (M o C) = p (M $\cup C$) = p (M) + p (C) – p (M $\cap C$) = $\frac{40}{120} + \frac{29}{120} - \frac{9}{120}\frac{9}{120}$

= $\frac{60}{120}$ = 0,5 = 50%

Ejemplo.

P (D o F) = p (DF) = p (D) + p (F) – p (D $\cap F$) = $\frac{35}{120} + \frac{80}{120} - \frac{20}{120} = \frac{95}{120}$ = 0,791 = 79,1%

5.8.2 Eventos independientes

Dos eventos, A y B, son independientes si la ocurrencia de uno no tiene que ver con la ocurrencia de otro.

Un caso de eventos independientes es el muestreo con reposición, es decir, una vez tomada la muestra se regresa de nuevo a la población donde se obtuvo.

Definición, A es independiente de B si y sólo si: A y B, son independientes si la ocurrencia de uno no tiene que ver con la ocurrencia de otro.

Ejemplo 1. Saca una bola de una bolsa con 3 bolas rojas, 5 blancas, y 2 verde. Observas el color, la pones de nuevo en la bolsa, y sacar otra bola. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja ambas veces?

Sacar una bola roja en el primer intento y colocarla nuevamente en la bolsa.

P (1R) = 3/10

Sacar una bola roja en el segundo intento. **P (2R) = 3/10**

Observe que sacar una bola roja en el segundo intento sigue siendo 3/10 y esto significa que los dos eventos son **independientes.** El resultado de un experimento no afecta el resultado del otro.

P (1R y 2R)= (3/10) (3/10) = 9/100

Si A y B son eventos independientes, *P* (*A* y *B*) = *P* (*A*) * *P* (*B*).

En general, para cualquier número de eventos independientes, la probabilidad de que todos los eventos sucedan es el producto de las probabilidades de que sucedan los eventos individuales.

5.8.3 Eventos dependientes

Dos eventos son dependientes si el resultado (probabilidad de ocurrencia) de un primer evento (A) afecta el resultado del segundo evento (B).

Si se presenta este caso, entonces se emplea el concepto de probabilidad condicional para nombrar la probabilidad del evento tratado.

La expresión P(A/B), significa la probabilidad de ocurrencia del evento **A** dado que el evento **B** ya ocurrió.

$$\mathbf{P\ (A|B) = P\ (A\ y\ B)\ /\ P\ (B) \qquad o \qquad P\ (B|A) = P\ (A\ y\ B)\ /\ P\ (A)}$$

Ejemplo 2. Se saca una bola de la bolsa y no es reemplazada. En un segundo intento se saca otra bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea roja y la segunda también lo sea?

P(1R) = 3/10
P(2R) = 2/9

Si la primera vez no regresa la bola a la bolsa, el espacio muestral cambia y así los eventos son **dependientes.**

$$\mathbf{P\ (1R\ y\ 2R) = P\ (1R) \cdot P\ (2R) = (3/10)\ (2/9) = 6/90 = 1/15}$$

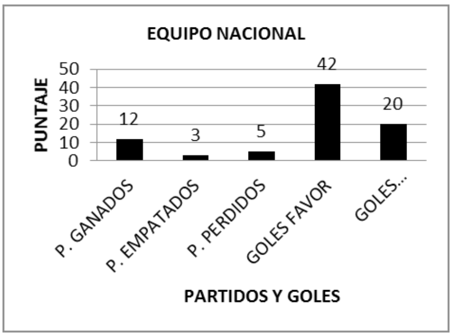
EJERCICIOS DE APLICACIÓN CAPÍTULO

1. A continuación, marque con una X, las características de la variable enunciada

VARIABLE	cualitativa	Cuantitativa	
		Disc.	Cont.
Temperatura de un objeto			
Cantidad de letras de un párrafo			
Cantidad de leche derramada			
Países de Suramérica			
Longitud de un tornillo fabricado por "metales"			
Equipos, del rentado del fútbol de Colombia			
Clasificación de acuerdo al partido político			
Costo de matrícula			
Tiempo de presentación de un programa de TV			
Actividades realizadas por empleado de oficina			

2. La gráfica muestra el rendimiento del equipo NACIONAL en el octogonal del torneo de fútbol de Colombia año 2016 y la tabla del rendimiento de los primeros cuatro equipos (cabeza de serie) que participaron en el torneo.

EQUIPOS	P. GANADOS	P. EMPATADOS	P. PERDIDOS	GOLES FAVOR	GOLES CONTRA
MEDELLÍN	11	7	2	33	17
NACIONAL	12	3	5	42	20
MILLONARIOS	11	4	5	17	13
SANTAFÉ	11	4	5	28	18



Respecto al rendimiento del equipo nacional en la última temporada, es correcto afirmar:

A. Anotó más goles y perdió menos partidos al final del octagonal.
B. Empató más partidos al final del octagonal.
C. Empató menos partidos e hizo menos goles a favor al final del octagonal.
D. Ganó más partidos e hizo más goles al final del octagonal.

La tabla muestra el número de pacientes atendidos en relación con la cantidad inscritos en algunas EPS de una ciudad colombiana.

Empresas Prestadoras de Servicio	Atendidos
EPS NORTE	2 de cada 40
EPS CENTRO	4 de cada 25
EPS SUR	24 de cada 30
EPS CALEÑITO	26 de cada 40

3. ¿En cuál de las EPS mencionadas, un paciente tiene mayor probabilidad de ser atendido?

A) EPS CALEÑITO B) EPS SUR C) EPS CENTRO D) EPS NORTE

Para las preguntas 4 a 7 tenga en cuenta el siguiente enunciado: (Operaciones)

Una casa vendedora de ropa, mediante pedidos por correo, comercia dos líneas de productos: una relativamente cara y la otra barata. Una encuesta de 1000 pedidos produjo las frecuencias de los pedidos por línea de producto y por el sexo de los consumidores como se ve en la siguiente tabla:

LINEA DE PRODUCTOS			
SEXO	1	2	TOTAL
MASCULINO	132	147	279
FEMENINO	516	205	721
TOTAL	648	352	1000

4. La probabilidad del evento A: el consumidor es mujer, es:

A) 2.79
B) 0.72
C) 0.35
D) 0.65

5. La probabilidad de que el pedido sea para la línea 1 y que el consumidor esa hombre, es:

A) 0.47
B) 0.20
C) 0.28
D) 0.13

6. La probabilidad de que el pedido sea para la línea 2 dado que el consumidor es mujer, es:

A) 0.28
B) 0.58
C) 0.20
D) 0.35

7. La probabilidad de que el pedido sea de la línea 2 ó de la línea 1, es:

A) 10,0%
B) 64,8%
C) 35,52%
D) 35,2%

8. En un Instituto de lenguas los alumnos pueden optar por una beca para cursar una lengua extranjera, alemán o italiano. En un determinado semestre, el 80% de los alumnos estudia alemán y el resto italiano. El 20% de los que estudian alemán son hombres y de los que estudian italiano el 30% son hombres. Elegido un alumno al azar,

a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre?
b. Elabore el diagrama de árbol.

9. En un concesionario se tiene la experiencia de que en promedio visitan el taller: en la mañana 4 con problemas de encendido, 10 con problemas de rodamiento y 6 con problemas de luces y por la tarde 3 con problemas de encendido, 5 con problemas de rodamiento y 2 con problemas de luces.

9.1. Elaborar una tabla ordenando los datos anteriores.

9.2. El porcentaje de los que acuden por la mañana, es:

A) 66,6% B) 60% C) 60,6% D) 50%

9.3. El porcentaje de los que acuden por problemas de rodamiento es:

A) 55% B) 40% C) 50% D) 45%

9.4 La probabilidad de que un automóvil con problemas de luces ó acuda por la mañana es:

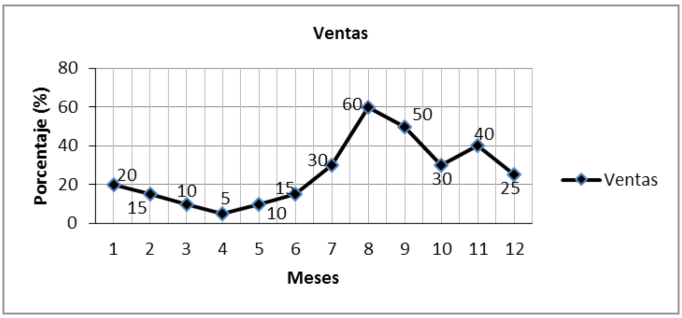
A) 26,6% B) 30% C) 35% D) 40%

9.5. La probabilidad de que visite el taller en la tarde dado que necesita servicio de rodamiento es:

A) 30,3% B) 33,3% C) 36,3% D) 30%

RESPONDA LAS PREGUNTAS 10 a 15 TENIENDO EN CUENTA LA INFORMACIÓN SUMINISTRADA A CONTINUACIÓN

La Siguiente gráfica muestra el porcentaje de ventas de lámparas respecto a la capacidad máxima de producción de una microempresa durante los doce meses del año, los que aparecen numerados así: 1 mes de enero, 2 mes de febrero, 3 mes de marzo y así sucesivamente.



10. Las ventas de las lámparas en el año siempre estuvieron entre un 5% y un 60%; esto se puede deducir porque:

A. El mayor porcentaje de ventas se presentó en el mes de agosto con un 60%.
B. Las peores ventas fueron 5% y las mejores del 60%.
C. El promedio de las ventas fue de un 45%.
D. En el mes de enero se vendió el 20% y en el mes de diciembre se vendió el 25%.

11. El porcentaje de ventas de cada mes se puede leer en la gráfica, luego las ventas del mes de febrero con respecto a las ventas del mes de mayo, son:

A. El 15% B. El 1,5% C. El 1.500% D. El 150%

12. Si en el mes de julio la empresa vendió 18.000 lámparas, en ese mes la capacidad máxima de producción fue:

A. El 40% B. 50.000 lámparas C. 60.000 lámparas D. 40.000 lámparas

13. Si en el mes de octubre la capacidad máxima de producción fue de 65.000 lámparas, en dicho mes se vendieron:

A. 19.500 lámparas B. 6.500 lámparas C. 1.950 lámparas D. 195 lámparas

Evaluación N°. 1

1. Las edades de un padre y su hijo están en la relación de 1 a 4. Si ambas edades suman 25. La edad del padre y su hijo es:

A) 20, 5
B) 22, 3
C) 21, 4
D) 24, 1

2. El 5% de un número es 12,5. El número es:

A) 50
B) 200
C) 250
D) 350

3. Un físico estima que dos cantidades Z y W están definidas por los números complejos 2+3i, y 1+4i, respectivamente. Si la cantidad que interesa al físico es K=Z.W, el valor de K es:

   A) 2+12i.
   B) 8-3i
   C) -10+11i
   D) -3+8i

4. Considere (P) el conjunto de los números primos, (N) el conjunto de los naturales, Z el conjunto de los enteros, (R) el de los reales, C el conjunto de los números complejos, e(I) el conjunto de los números imaginarios. Las siguientes relaciones son verdaderas:

A) $Z \subseteq R$	( )	E) $I \not\subset R$	( )
B) $R \not\subset C$	( )	F) $N \cup Z = I$	( )
C) $N \cap R = N$	( )	G) $P \not\subset R$	( )
D) $N \cup Z \cup R = R$	( )	H) $C \subseteq R$	( )

5. El resultado de {12+(5-1)+8}-{-(12-9)+3+2}-[-(-5-9)], es:

   A) 8
   B) 18
   C) 13
   D) 6

6. Si se sabe que la edad de Marcos es el mayor de los divisores de los números 32, 88 y 96, es:

   A) 32
   B) 8
   C) 11
   D) 3

7. Un tanque tiene una capacidad de 2.400 litros de agua. Se derraman 600 litros. El porcentaje que representa los litros derramados frente a la capacidad total es:

   A) 0,25
   B) 0,3
   C) 0,2
   D) 0,15

8. Funcionando 12 máquinas realizan un trabajo en 3 semanas, Si se aumentan las máquinas en 6; el trabajo se realizará en:

   A. 1
   B. 2
   C. 3
   D. 0,5

9. Un automóvil recorre 350 km en 5 horas, con una velocidad constante. Los kilómetros recorridos en 18 horas son:

   A. 1750
   B. 1260
   C. 90
   D. 97

10. La respuesta de: $\frac{0{,}3^{6} * 0{,}5^{5} * 0{,}3^{7} * 0{,}5^{8} * 0{,}2^{5}}{0{,}3^{11} * 0{,}5^{8} * 0{,}2^{5}}$ es:

    A. $0{,}3\text{x}10^{8}$
    B. $3\text{x}10^{2}$
    C. $3\text{x}10^{-2}$
    D. $9\text{x}10^{-2}$

Responda las preguntas 11 y 12 de acuerdo con lo siguiente:
Según información del Observatorio de Seguridad Vial de la Secretaría de Tránsito de Cali, durante los años 2015 y 2016 (período: 1° de enero y el 19 de junio); se presentaron choques que se muestran en la tabla.

CHOQUES	**Año 2015**	**Año 2016**
Colisiones	7.713	7.104
Decesos	137	142
Heridos	4.467	3.869

11. De acuerdo con la información adjunta el porcentaje de disminución de colisiones del año 2016 respecto al 2015, es:

    A) 7,8%
    B) 8,6%
    C) 92,1%
    D) 6,8%

12. De acuerdo a la información no es correcto afirmar que:

A) Se presentan más de 4.000 personas heridas en el año 2015
B) El porcentaje de colisiones del año 2015 excede al porcentaje de colisiones del año 2016
C) El porcentaje de incremento de los decesos del año 2015 al año 2016 es 96%
D) El total de choques del año 2016 NO representa el 90,2% del año 2015

13. Don Camilo, canceló por su familia (papá, mamá, hija e hijo) $200.000 para ingresar a una función de Delirio. Al mes siguiente, asisten a una presentación especial y por ser cliente le descuentan el 15%. El valor que debe pagar don Camilo es:

A) 200.000
B) 30.000
C) 170.000
D) 230.000

14. Un atleta que parte de la meta de llegada hace los siguientes recorridos: 4 km al norte, 3 km al este, 2 km al sur, 1km al este, 1km al sur, 4 km al oeste y 1km al sur. Al finalizar el recorrido el atleta se encuentra:

A) a un kilómetro al norte de la meta de llegada
B) a un kilómetro al norte y cuatro kilómetros al este
C) en la meta de llegada
D) a 4 kilómetros al norte

15. Un padre tiene 80 años, la edad de su hijo es la cuarta parte de la edad del padre.
El porcentaje que representa la edad del hijo respecto a la de su hijo es:

A) 4%
B) 25%
C) 60%
D) 20&

Evaluación N°. 2

1. Simbolizar:

A. La suma de un número con su antecesor.
B. Doce más el doble de un número.
C. El cuadrado de un número, menos cuatro.
D. Un número menos ocho es igual a doce.

2. La suma de un número con su quíntuple es igual a 120. El número es:

A. 6
B. 120
C. 12
D. 20

3. El resultado de: $12 - \frac{(2)(2x)\sqrt{X^8}}{2\sqrt{X^8}} = 10$ es:

A. ± 4
B. ± 1
C. -1
D. ± 8

4. El resultado de: $\frac{5X+5}{-3} < 15$, es:

A. $X>10$
B. $X>-10$
C. $X<-10$
D. $X<10$

5. El resultado de : $4\,|X-6| = 4$ es:

A. {4, 6}
B. {5, 7}
C. {4, 7}
D. {6, 7}

6. Resolviendo la ecuación $2x^2 - 5X + 3 = 0$, se obtiene:

A. X=-3 ; X=-1
B. $X = \frac{-3}{2}$; X =-1
C. X = 2 ; X =-1
D. $X = \frac{3}{2}$; X = +1

7. A la siguiente ecuación: $X^2 - 6X - 5 = 0$, hallar el valor de:

A. Las raíces: $X_1 =$; $X_2 =$
B. El vértice de la parábola
C. Indique hacia a donde abre la parábola

8. Indique el DOMINIO y el RANGO en la siguiente función $F(x) = \frac{2-X}{x-1}$:

A. D = R-{1} R = R –{-1}
B. D = R +{1} R = R +{+1}
C. D = R –{-1} R = R –{1}
D. D = R-1 R = R + 1

9. Al resolver la inecuación 4X + 6> 6X -10 el intervalo solución es

A. $(-\infty, 8)$
B. $[\ \infty, -8\ )$
C. $[\ 8, -,8\infty]$
D. $(\ \infty, 8\ ]$

El enunciado siguiente corresponde a los problemas número 10 y 11

Juan Camilo hizo un viaje en automóvil y lo inició con 20 galones de gasolina corriente. El recorrido lo hizo en dos etapas: en la primera se gastó dos quintos de la gasolina que tenía el tanque y en la segunda etapa, la mitad de la gasolina que le queda:

10. El número de litros de gasolina que gastó en el viaje es:

A. 20
B. 15
C. 9
D. 14

11. Los litros consumidos en la primera y segunda etapa son;

A. 8 y 6
B. 14 y 20
C. 6 y 14
D. 8 y 14

El IMC determina a partir de la estatura y el peso, el rango más saludable de masa que puede tener una persona. IMC = $\frac{peso\ (kg)}{(estatura)^2\ m}$

12. De acuerdo con la información anterior se deduce que:

A) el peso es equivalente a IMC por la estatura.
B) el IMC, elevado al cuadrado equivale al cociente entre la estatura y el peso.
C) la altura de la persona al cuadrado equivale al cociente entre el peso y IMC
D) el peso de la persona es equivalente al cociente entre IMC y la estatura al cuadrado.

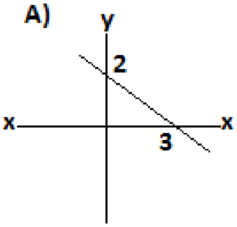
Además, se adiciona la clasificación de la Organización Mundial de la Salud:

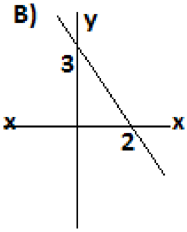
ÍNDICE DE MASA CORPORAL	CLASIFICACIÓN
< 16	Infrapeso: Delgadez Severa
16,00 – 16,99	Infrapeso: Delgadez moderada
17,00 – 18,49	Infrapeso: Delgadez aceptable
18,50 – 24,99	Peso Normal
25,00 – 29,99	Sobrepeso
30,00 – 34,99	Obeso: Tipo I
35,00 – 40,00	Obeso: Tipo II
>40	Obeso: Tipo III

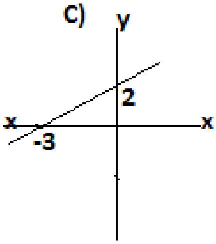
13. Según la información anterior una persona que pese 90Kg y que mida 180 cm de estatura, **tiene sobrepeso;** dicha afirmación es:

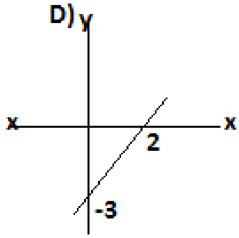
A. Falsa porque al calcular su IMC este es inferior 18,5
B. Verdadera porque al calcular su IMC está entre 25,00 y 29,99
C. Falsa porque al calcular su IMC este es inferior 18,5.
D. Verdadera porque al calcular su IMC está entre 16,00 y 16,99

14. De las siguientes gráficas, la que mejor representa la función lineal 3Y+2X-6 =0 es:

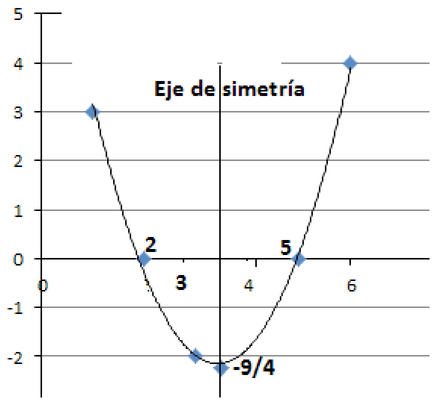
A) 

B) 

C) 

D) 

La siguiente gráfica muestra una función parabólica de la forma $f(x) = ax^2 + bx+c$



15. Determinar

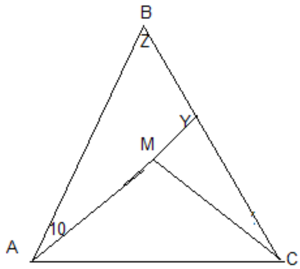
A) la ecuación de la gráfica.
B) Las coordenadas del vértice.
C) El valor de f (2).
D) La ecuación del eje de simetría.

Evaluación N° 3

Responda las preguntas 1 y 2 de acuerdo con lo siguiente:

1. En el gráfico el triángulo ABC, es isósceles y el triángulo AMC es equilátero. El ángulo X=10, el valor del ángulo Z, es:

2. Usando el miso gráfico, el valor del ángulo y es:



Respuestas:

1. A. 40	B. 50	C. 70	D. 30
2. A. 130	B. 110	C. 50	D.120

3. En la figura 2, determinar la medida de cada uno de los once ángulos restantes.

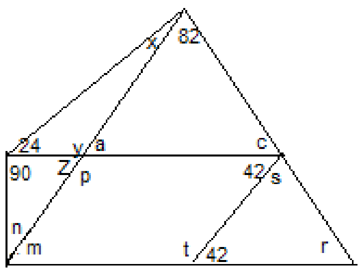


Figura 2

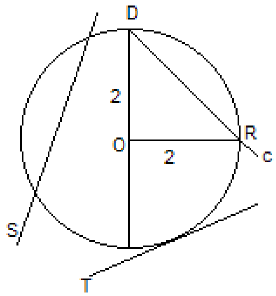


Figura 3

4. Teniendo en cuenta la figura 3:

4.1 Escribir el nombre de cada una de las líneas notables de la circunferencia.

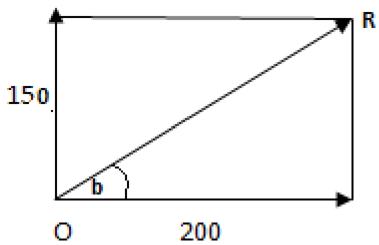
A._________ B._________ C._________ D._________ E.__________

4.2. La longitud de la cuerda DR es:

A. $2\sqrt{2}$
B. 4
C. $\sqrt{4}$
D. 8

5. Un cuerpo en O está sometido a dos fuerzas una de 150 libras hacia el norte y la otra de 200 libras hacia el este.

   5.1. La magnitud de la resultante es:
   5.2. La dirección de la resultante es:



Respuestas:

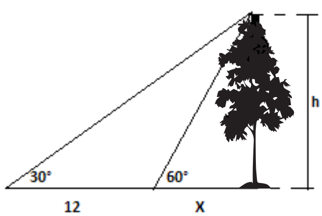
5.1 A) 250 lb
B) 350 lb
C) 50 lb
D) 400 lb

5.2 A) 36°50´
B) 36,8
C) 50°
D) 50° 36´

6. Complete la siguiente tabla:

GRADOS	45°		130°	
RADIANES		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{\pi}{5}$

7. La altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa bajo un ángulo de 30° y si nos acercamos 12 m, bajo un ángulo de 60°, es:



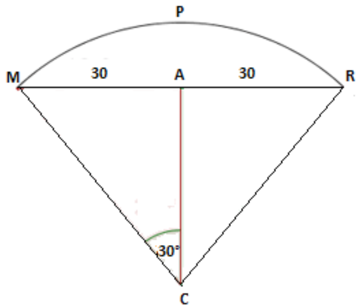
A) 5,9

B) 6,84

C) 10,0

D) 17,9

8. En la gráfica se tiene el corte vertical de un cono. El helado dibuja el arco de circunferencia MPR, correspondiente a 60° y subtiende la cuerda MR que mide 60 cm. El radio es:



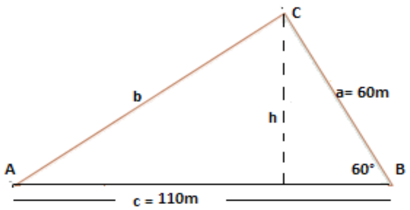
A) 63

B) 35

C) 30

D) 60

9. El área de un lote que tiene forma de un triángulo cualquiera, si se sabe que dos de sus lados miden 60 m y 110 m y forman entre ellos un ángulo de 60° es:



A) 2.800

B) 2.388

C) 2.500

D) 2.838

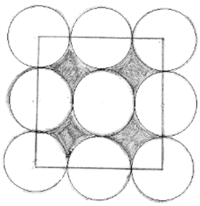
10. Para calcular el lado "b" se puede:

A. Aplicar solamente el teorema del seno.
B. Aplicar solamente el teorema del coseno.
C. Aplicar solamente el Teorema de Pitágoras.
D. Aplicar una función trigonométrica

11. El ángulo A tiene medida igual a 32,6 grados. Esta afirmación resulta ser:

A. falsa, porque seno A es igual a 0,60.
B. cierta, porque el triángulo ABC es rectángulo.
C. falsa, porque no se puede determinar.
D. Cierta, porque seno A es igual a 0,54.

12. Se tiene una distribución de 9 monedas de \$1.000 como se muestra en la gráfica. Los círculos representados por las monedas son congruentes con un área de 1521π. Sabiendo que por los centros de las 8 monedas externas pasa un cuadrado; el área de la parte sombreada es:



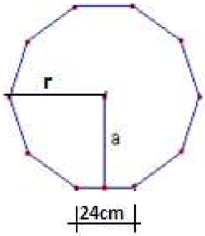
A) 2704π

B) 676π

C) $676(4-\pi)$

D) $2704(4-\pi)$

13. La apotema de un decágono regular de lado 24 cm, es:



A) 38,1

B) 37,5

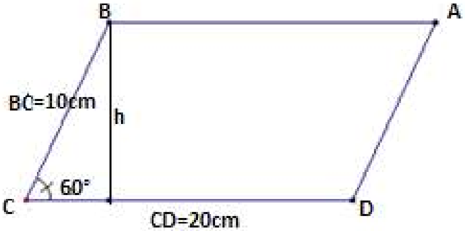
C) 36

D) 72

14. El área de la figura anterior (decágono regular) es:

A. 4.500
B. 4.572
C. 4.700
D. 3.750

15. La siguiente gráfica corresponde a un paralelogramo cuyas medidas se aprecian en la figura. El área del paralelogramo es:



A) 86

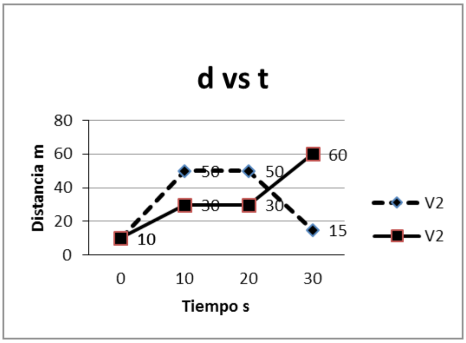
B) 21,7

C) 172

D) 217

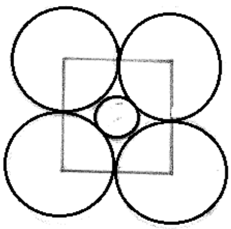
Evaluación N° 4

1. La siguiente gráfica muestra el desplazamiento de dos vehículos, V1 y V2, durante un tiempo determinado.



A. La velocidad mayor fue para V1 en el intervalo (10 a 20) segundos.
B. La velocidad de V1 y la de V2 es igual en el intervalo (20 a 30) segundos.
C. El vehículo V1 tuvo mayor velocidad en el intervalo (0 a 10) segundos
D. La velocidad de V2 en el intervalo (10 a 20) segundos fue 30.

2. Se tiene un juego de 4 monedas de $500 dispuestos según la figura. Si el total del área de las 4 monedas es 121π y sabiendo que las monedas son tangentes; el diámetro de la moneda pequeña es:



A) 4,5

B) 15,5

C) 5,5

D) 11

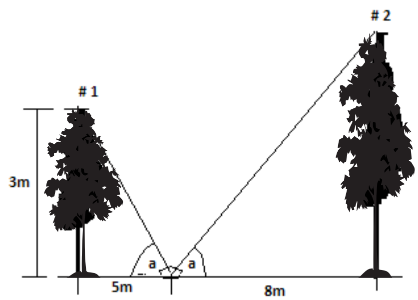
3. Una empresa que fabrica juguetes estándar de forma circular, cuyo perímetro es 376,8cm, necesita cumplir con un pedido en el cual debe disminuir el perímetro en 56,52cm. El porcentaje que necesita disminuir es:

A. 14%
B. 15%
C. 20%
D. 2 5%

4. Un frigorífico mantiene, dentro de sus instalaciones, temperaturas entre los 15°C y los 40°C, para cumplir con normas de calidad. La temperatura entre los grados Celsius y Fahrenheit está relacionada con la siguiente expresión, $C = (\frac{5}{9})(F - 32)$. Para cumplir con las condiciones de calidad, el intervalo en grados Fahrenheit debe ser:

A. $86<F<50$
B. $120<F<240$
C. $59<F<86$
D. $59<F<104$

5. En medio de dos árboles se encuentra una lámpara que emite rayos luminosos que pasan por la parte más alta de cada árbol; el árbol # 1 se encuentra a 5m de la lámpara y tiene una altura de 3m, el árbol #2 está situado a 8m de la fuente, el ángulo formado en la lámpara es (a) para los dos árboles, como se muestra en la gráfica



La altura del árbol #2 es:

A) 30,9

B) 24

C) 4,8

D) 13

La siguiente figura se utiliza en el problema número 6.

6. Juan Camilo ha realizado el siguiente diseño, en la clase de arte, para pintarlo.

La longitud de cada cuadrado es: "a"

Construyó una cuadrícula, y delimitado un triángulo y un exágono sombreados de color negro. Juan Camilo utiliza cinta de enmascarar con el fin de delimitar el triángulo y el exágono para evitar pintar fuera de ellos. La cantidad de cinta de enmascarar que necesitará Juan Camilo en total es:

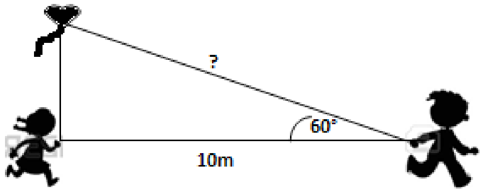
A. $a\sqrt{5}$

B. $5a\sqrt{5}$

C. $4a(2\sqrt{5} + 1)$

D. $4a(7+2\sqrt{5})$

7. Juan Camilo está elevando su cometa, mientras su prima Sarita lo sigue. Sarita se encuentra a 10 m de Juan Camilo y justo debajo de la cometa, como lo muestra la siguiente imagen.



Recuerda que:

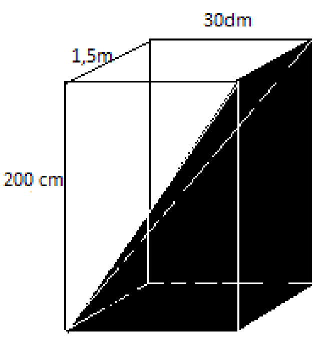
$\text{Sen}60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{Cos}60° = \frac{1}{2}$

La longitud en metros de la cuerda de la cometa es:

A. 20 m
B. $10/\sqrt{3}$
C. $40/\sqrt{3}$
D. $10\sqrt{3}$

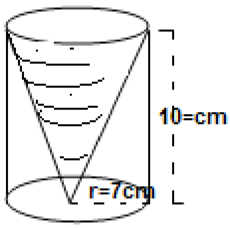
8.



Una caja de zapatos de forma paralelepípedo como la de la gráfica tiene 30 dm de largo; 1,5 m de ancho y 200 cm de alto. Se divide con un cartón (plano diagonal) como se aprecia en la figura; el volumen de la parte sombreada es:

A) $5{,}4\ m^3$
B) $4{,}5\ m^3$
C) $9\ m^3$
D) $18\ m^3$

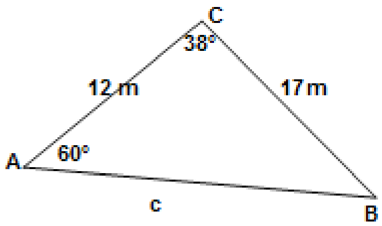
9.



Un dosificador de teteros tiene la forma que se aprecia en la figura. Una parte cónica para llevar la leche en polvo y otra cilíndrica para el agua. Si el cilindro tiene una altura de 10 cm y de radio 7 cm. La capacidad que se tiene para llevar agua y el volumen para portar la leche en polvo es:

A) 0,9 litros, 452,1 cm^3
B) 9 litros; 542,1 cm^3
C) 1,0 litro; 512,8 cm^3
D) 9,1 litros; 425,1 cm^3

10.

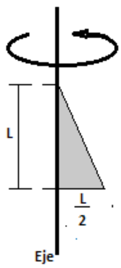


Se tiene un terreno triangular cuyas medidas se aprecian en la figura de la izquierda. El lado (c) y el ángulo ∢B, mide:

A) 11,4 m; 120°
B) 10,7 m; 82°
C) 114,76 m: 90°
D) 29 m; 98°

La gráfica muestra un diseño para generar sólidos de revolución haciendo girar la figura sombreada alrededor del eje.

11. Se infiere que el sólido generado es:



A. una pirámide de altura L (ele).
B. un triángulo de lado L.
C. un cono de diámetro L.
D. un triángulo isósceles.

12. El volumen del sólido generado en la gráfica anterior está dado por:

A. $V = \frac{\pi l^3}{12}$

B. $V = \frac{\pi l^3}{3}$

C. $V = \frac{\pi l^2}{3}$

D. no se puede conocer

13. Si, se supone que L = 6; su volumen es:

A) 18π

B) 72π

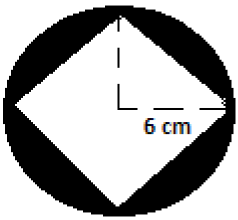
C) 12π

D) 24π

14. Un velódromo de pista mide 250 m. Un ciclista en competencia avanza aproximadamente 125 cm en cada pedalazo. Con la anterior información el ciclista en una vuelta al velódromo da:

A. 200 pedalazos
B. 210 pedalazos
C. 312 pedalazos
D. 250 pedalazos

15. El diseño de un logo corresponde a un cuadrado de color blanco, inscrito en una circunferencia de 6 cm de radio. El área que aparece en color negro y está por fuera del cuadrado es:



A) 8,5

B) 72

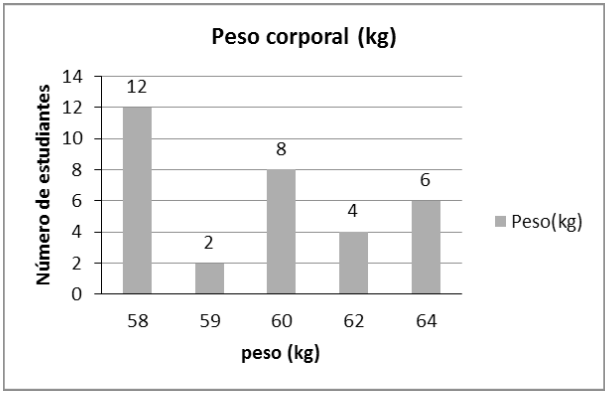
C) 41

D) 113

Evaluación 5

Las preguntas 1 a 3 se resuelven con la siguiente información:

Se preguntó a cada uno de los estudiantes de un curso por su peso y se obtuvo los resultados que se observan en la gráfica:



1. De la información suministrada por la gráfica es correcto afirmar que:

A. El 25% de los estudiantes pesan 62 kg.
B. El 18,75% de los estudiantes pesan 58 kg.
C. El 12,5% de los estudiantes pesan 63 kg.
D. El 6,25% de los estudiantes pesan hasta 59 kg.

2. De la información suministrada por la gráfica es correcto afirmar que:

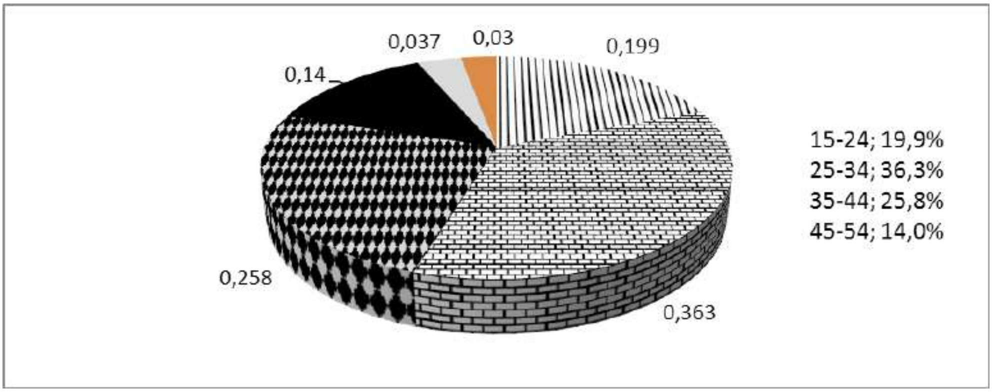
A. El porcentaje de estudiantes cuyo peso es superior a 60 kg es 31,25%.
B. El porcentaje de estudiantes cuyo peso es inferior a 62 kg es 81,25%.
C. El porcentaje de estudiantes cuyo peso esta entre (60-64) kg es 25%.
D. El porcentaje de estudiantes cuyo peso es 63 kg es 12,5%.

3. El peso promedio del grupo está entre:

A. 58 kg y 60 kg.
B. 58 kg y 59 kg.
C. 60 kg y 62 kg.
D. 62 kg y 64 kg.

Las preguntas 4 a 6 se resuelven de acuerdo a la siguiente información:

La siguiente gráfica representa la distribución de afiliados a pensión por edad en Colombia.



4. Para calcular la probabilidad de que un pensionado en Colombia tenga (45 a 54) años y (25 a 34) años, se debe:

A. Hallar el cociente entre 0,14 y 0,363
B. Sumar 0,14 con 0,363
C. Multiplicar 0,14 por 0,363 y restar 0,363
D. Sumar 0,14 con 0,363 y restar 0,14

5. En el país hay 1.240.000 pensionados. Teniendo en cuenta la información inicial, se puede decir que el número de pensionados de (45 a 54) años está entre:

A. 0 a 100.000.
B. 100.000 a 200.000.
C. 200.000 a 300.000.
D. 300.000 a 400.000.

6. Teniendo en cuenta la información inicial y el número de pensionados que hay en el país, se deduce que la cantidad de pensionados de edad (25 a 34) años es:

A. 173.600.
B. 246.760.
C. 450.120.
D. 45.880.

Las preguntas 7 y 8 se resuelven de acuerdo a la siguiente información:

El auditor de calidad de una empresa que fabrica muñecas de cerámica, producidas con un nuevo molde, es el encargado de dar el visto bueno a la producción. Aleatoriamente se toman 13 muñecas de un lote para medir su peso en gramos. Las medidas fueron: 60; 30; 42; 30; 60; 42; 32; 38; 40; 30; 38; 36 y 68.

7. En los datos de dicho lote se observa;

   I. La moda de los datos suministrados es 30.
   II. La mediana de los datos suministrados es 39.

Con respecto a estas aseveraciones es correcto:

A. Ambas son falsas.
B. Solo la segunda (II) es verdadera.
C. Solo la primera (I) es verdadera.
D. Ambas son verdaderas.

8. Con respecto a los datos del lote a producción de muñecas, se hacen las siguientes aseveraciones:

   I. La media de los datos suministrados es 30.
   II. La mediana de los datos suministrados es 38.
   III. La moda de los datos suministrados es 39,8.

Teniendo en cuenta las proposiciones anteriores:

A. La II. y la III. Son verdaderas.
B. La I. y la III. Son falsas.
C. Las tres (I., II. Y III.), son verdaderas.
D. La I. y la III., son verdaderas.

9. Se realizó un estudio a una población de 780 estudiantes, hombres y mujeres, matriculados en las diferentes carreras de la Facultad de Ciencias Económicas de una universidad de la ciudad.

CARRERA	HOMBRES	MUJERES
Administración	100	90
Contabilidad	240	60
Mercadeo	50	60
Economía	30	30
Finanzas	90	30

Teniendo en cuenta la tabla de datos. Se puede concluir que es correcto afirmar que:

I. El 75% de los estudiantes de Contabilidad son hombres.
II. El 47,3% de los estudiantes de Administración son mujeres.
III. El promedio de los estudiantes de Mercadeo es 110.
IV. El 75% de los estudiantes de Finanzas son hombres.

A. Las opciones II. Y III., solamente.
B Las opciones II. y IV., solamente.
C. Las opciones I. Y II., solamente.
D. La opción IV., solamente.

10. Se desea hacer un estudio sobre la cantidad de personas pensionadas por vivienda en un barrio de la ciudad, se sabe que hay una población de 12.000 hombres y 8.000 mujeres, de la cual se debe tomar una muestra de 150 personas. Para que la muestra sea representativa, el estudio debe hacerse a:

A. Las primeras 150 personas que están en el listado.
B. 75 hombres y 75 mujeres elegidos al azar.
C. 90 hombres y 60 mujeres elegidos al azar.
D.Las 150 personas con mayor edad en el barrio.

11. Mariana debe ir desde su casa a visitar a su tía Vicky, pero antes debe pasar por la casa de su prima Carolina. Para desplazarse de la su casa la de su tía, le sirven 3 rutas de buses y para ir, finalmente, desde la casa de su tía a la de su prima, le sirven solo 2 buses. El espacio muestral (S) de este recorrido es:

A. S = {(R1,B1), (R1,B2), (R2,B1), (R2,B2), (R3,B1), (R3,B2)}
B. S = {(R1,B1), (R2,B2), (R2,B1), (R3,B2), (R3,B1), (R3,B2)}
C. S = {(R1,B1), (R1,B2), (R2,B1), (R3,B3), (R3,B1), (R3,B3)}
D. S = {(R1,B3), (R1,B2), (R2,B1), (R2,B3), (R3,B1), (R3,B2)}

Las preguntas 12 a 14 se resuelven con la siguiente información:

Un lote formado por 10.000 partes, producidas en cuatro máquinas fue calificado de acuerdo a tres formatos. Los resultados fueron:

GRADO	**MÁQUINAS**			
	M	N	S	T
Bueno	2400	1600	1900	2000
Regular	450	300	400	350
Desperdicio	150	100	200	150

12. La probabilidad de que una parte sea seleccionada haya sido producida por la máquina **N** es:

A. 0,25
B. 0,35
C. 0,30
D. 0,20

13. La probabilidad de que una parte seleccionada sea Regular ó haya sido producida por la máquina **S** es:

A. 0,35
B. 0,36
C. 0,30
D. 0,32

14. La probabilidad de que una parte seleccionada es de grado Bueno dado que se haya producido por la máquina T, es:

A. 0,75
B. 0,60
C. 0,80
D. 0,90

15. Una caja contiene 6 bolas azules, 9 bolas café y 10 bolas negras. Si se extrae una bola al azar; la probabilidad de que no sea negra es:
A. 0,4
B. 0,6
C. 0,36
D. 0,24

Respuesta a los ejercicios impares de las aplicaciones

	CAPÍTULO 1						CAPÍTULO 3			
Pregunta	**A**	**B**	**C**	**D**		**Pregunta**	**A**	**B**	**C**	**D**
1				X		1	X			
3	X					3			X	
5			X			5			X	
7			C			7		X		
9	A					9				X
11	B									
	CAPÍTULO 2					11	X			
Pregunta	**A**	**B**	**C**	**D**		13	X			
1		X				15	X			
3		X					**CAPÍTULO 4**			
5	X					**Pregunta**	**A**	**B**	**C**	**D**
7				X		1			X	
9			X			3				X
11	X					5			X	
13		X				7			X	
15	X					9		X		
17		X				11				X
19	X					13		X		
21			X				**CAPÍTULO 5**			
23				X		**Pregunta**	**A**	**B**	**C**	**D**
25	X					3		X		
39			X			5				X
41	X					7	X			
						9.2	X			
						9.3			C	
						9.4				X
						9.5		B		
						11				D
						13	A			

9.1

	Encendido	**Rodamiento**	**Luces**
Mañana	4	10	6
Tarde	3	5	2

N° 1

VARIABLE	CUALITATIVA	CUANTITATIVA		ESCALA
		DISCRETA	CONTINUA	
Temperatura de un objeto			x	Intervalo
Cantidad de letras de un párrafo		x		Razón
Cantidad de leche derramada			x	Razón
Países de Suramérica	x			Nominal
Longitud de un tornillo fabricado por ”Metales”			x	Razón
Equipos del rentado de fútbol de Colombia	x			Nominal
Clasificación de acuerdo al partido político	x			Nominal
Costo de matrícula			x	Razón
Tiempo de presentación de un programa en TV			x	Razón
Actividades realizadas por empleado en oficina	x			Nominal

Respuesta a los ejercicios de las evaluaciones

EVALUACIÓN N° 1		EVALUACIÓN N° 2	EVALUACIÓN N° 3	EVALUACIÓN N° 4	EVALUACIÓN N° 5
PREGUNTA	RESPUESTA	RESPUESTA	RESPUESTA	RESPUESTA	RESPUESTA
1	A	2n-1 12+X X^2 -4 X-8=12	A	C	Dr
2	C	D	A	A	A
3	C	B	X=18°; n=48° m=42°; y=138° t=138°; r=60° c=56°; s=82° a=42°	B	A
4	B, C, D, E	C	4.1 radio, diámetro, tangente, secante, cuerda 4.2 A	D	B
5	C	B	5.1 A 5.2 B	C	B
6	B	D	$45° = \frac{\pi}{4}$ rad $5\frac{\pi}{3} = 300°$ $130° = 2\frac{\pi}{3}$ rad $\frac{\pi}{5}$rad = 36°	D	C
7	A	5, -1 V(3,-14) Arriba	C	A	C
8	B	A	D	C	B
9	B	B	D	C	B
10	D	D	B	B	C
11	A	A	D	C	A
12	A	C	C	B	D
13	C	B	A	B	B
14	C	B	B	A	C
15	B	A) X^2 -7x+10=0 B) $V(\frac{7}{2}, \frac{-9}{4})$ C) F(2) =0 D) $X = \frac{-9}{4}$	C	C	B

Bibliografía

Aguilar Ibagué, J. (2010). *Estadísticas para todos. Estadísticas descriptiva introducción a las probabilidades.* Cali: poemia.

Ángel, A. R. (1994). *Algebra elemental*. México: Prentice Hall.

Barnett, R. (1994). *Algebra. México*: McGraw Hill.

Bellor, I. (1998). *Algebra elemental.* México: Thompson.

Levine, D. M.; Berenson, M. L.; Krehbiel, T. C. (2006). *Estadísticas para administración. México:* Pearson Educación.

Drooyan, I; Franklin, K. (1998). *Elementos de algebra para bachillerato.* México.: Limusa.

Erega, H. *Matemática I. Bogotá:* Edición Santillana.

Gustafson, D. R. (1997). *Algebra intermedia.* México: Thompson.

Lehmann, H. C. (2001). *Algebra.* México: Limusa.

Martínez, M. A. (1996). *Aritmética y Algebra.* México: McGraw Hill.

Mendenhall, W.; Beaver, B. M.; Beaver, R. J. (2012). *Introducción a la probabilidad y estadística.* Ed. Cengage Learnig.

La Universidad Santiago de Cali, USC, como Institución de Educación Superior, que cuenta con trayectoria en la Región del Valle del Cauca y con prestigio por su componente en Responsabilidad Social, es conocedora de la importancia de participar en procesos que permitan desarrollar prácticas de asesoría y apoyo al Estado. Además, la USC tiene en cuenta que para efectos de ingreso a la Educación Superior, que exige presentar las Pruebas de Estado a los estudiantes que están finalizando grado undécimo (11°) o a quienes hayan obtenido el título de bachiller o hayan superado el examen de validación de bachillerato, tiene como objetivo apoyar a los colegios en el proceso educativo y facilitar a los estudiantes técnicas que les permitan mejorar su nivel cognitivo, para obtener mejores resultados en las pruebas del Estado Saber 11° que faciliten el ingreso a la formación profesional.

VIGILADA MINEDUCACIÓN

USC UNIVERSIDAD SANTIAGO DE CALI

EDITORIAL

9 789588 920436